

هو

فاير سواقيلك

مقاله اول

طبع في مطبع

الناصر

١٣٢٦

M.A. LIBRARY, A.M.U.



PE14664

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

حمد و ستایش و تقدیر و نیایش فزون از اندازِ حکیم صانع مهند و سزاست
 که بکمالِ قدرت نظامِ قوامِ هیئتِ موجودات با شکالِ مختلفه هندسیه
 و صورِ متنوعه بدعیه بر سطحِ عالمِ ایجاد و الواحِ کائنات مرتسم و منتظم نموده
 و جمیع را جماعتِ کرامی بدائعِ علوم و حکم و ظهورِ اصناف و فنون در عالم
 مُرین نمود تا تجلیاتِ حقائقِ حکمیه و دقائقِ کمالاتِ ذاتیه از حقیقتِ
 انسانیّه ظاهر شود و شقائقِ فوائد و قواعدِ صنعیه از حقائقِ افکارِ نفوس
 ترکیه بقدرتِ کامنده چون انهارها را بکافورستانِ الارض وجود چمن و نبات
 جلّت تقدیر و جمّت قدرت و تعالت ثامر و کمیت شعرة و احاطت فضاله
 علمیه فی السموات و الارضین **اما بعد** چنان گوید بنده **صید**
 علی محمد کشمیر که بر ضمیرِ نیازِ بابِ علم و دانش و خاطرِ خیرِ احتیاج
 و بینش پوشیده نیست که **اقلیدس** یعنی علم هندسه کلیدِ خزان

علوم و حکم و کجینه طرق ترقیات اهل تمدن و مایه آسایش ام عالم است که
هرگاه علم هند سر ضمیمه تعلیم نبود ای بسا مقاصد عظیمه انسان در پرتو خفا
مستور و محجوب ماند و اهل جهان از فوائد آن بجز و نتایج افکار دقیقه انسانی محروم
و غیر منتهی بودی که

مثلاً هرگاه علم هند سر نمی بود علم هیئت و علم مساحت و جغرافی و نیز بسیاری
از علوم مفیده عالییه که هیئت است از آن محتاجند تکمیل غیایات چنانچه
حضرت مولی الموالی در دستان جهان چنین بطق فرمود **المهند للنبی** که
از اینجاست که ارباب علم و حکمت گفته اند ما دامیکه از علم هند اطلاع
و آگاهی نباشد هرگز نمی توانیم علوم مذکور را بر پایه ها حاصل نشود و بنیاد تحصیل آن
در عالم ایجاد مستحکم و متقن نکردد که

این مختصر نکجانش اینقدر دارد که فوائد کثیر این علم شریف را بر شما عرض
هر چند برای انحلال آن قائل اشکال اقلیدس افکار غیر ضمیمه نمی باشد و لکن
اساتید حکما و مهندمین قائل بر آنند که خود علم اقلیدس بر اقوال عقلیه و محاوره
قوی است **مثلاً** هرگاه طالب العلم بدقیقه از دقائق که در آن بنظرش
دشوار آید برخورد خود را سازد بلکه تعمق نماید چه تعمق در مطالب محتمل
حل دقائق علیه معلی است که مافوق آن متصور نبوده و نیست که
مثلاً هرگاه از صد مرحله این علم یا ساعا علوم مرحله از تدریس معلم شفیق
طی شود قطعاً باقی مراحل از تعمق طی و مشعل خواهد بود که

خوشتر از آنیکه در صد سال در مادم چنانچه در اقوام و تمدن عالم متداول است

درا بتالی تعلیم مادرش مکمل پس اقلیدس چهارم و معروف گردید
اقلیدس نام حکیمی است معروف و از تجید مستغنی گویند و ولدش
شهر (صور) که موضعی است بر ساحل بحر شام (یا بحر اوسط) و لکن تحقیق
رسید که ملاج کلاً علیّه نامیده شد (اسکندریّه) طبعی بود و یکی از بزرگای
طبقة افلاطونی بوده - سیصد و چند سال پیش از ظهور حضرت مسیح افتاد
علوم را بنیاد میفرموده - مصنفاش بسیار جملة در علم هند پانزده صفا
تحریر فرموده است -

هر چند بعضی بر آنند که مصنف سیزده مقاله اول (حکیم ابوالیوسف) بوده است علی‌ای حال اقلیدس حکیم علم هند را چنان ترتیب داده و تدوین نموده که بنام نامیش موسوم بجای که میا ارباب علوم و کمالات اقلیدس و علم هند سه بیای محنی مصطلح گردید

سنگ

اشکال و باعتبار نتائج و انواع قراردادہ قہری و علی و قسم و یکرا اثباتی فامیدہ است۔

مثلاً در مقاله اول شکل ۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵

این چهارده شکل علی

وباقها اثنائي نامیده است.

امتیاز این دو قسم غیر از این نباشد که در جهت مشکی یا زرد معلوم
و از آن معلوم اصول فقه که متعلق بخود آن شکل است دست کم می

هرگاه این اصول که از معلومات شکل معلوم می‌شده‌اند اشاره نماید بسوی عمل بر آن شکل را عملی کنید

و هرگاه اصول مذکور مبنی باشد بر مطلبی که در بحث شکل معلوم مقصود است آنرا شکل اثباتی کنید

مثلاً در مقاله اول شکل اول اصول ارسطی مثلث متساوی الاضلاع را می‌نماید

ایضاً در مقاله اول شکل دوم قاعده بدست می‌دهد که از نقطه معلوم خطی مساوی با خطی دیگر در خارج نمایم

ایضاً در مقاله اول شکل سوم اصول نقطه تقاطع مقدار خط اقصی از خط اطول یاد می‌دهد این اشکال را عملی خوانده‌اند

و اما شکل اثباتی

مثلاً در مقاله اول شکل چهارم اصولی بدست می‌دهد یعنی ثابت میکند که هرگاه دو ضلع مثلثی با دو ضلع مثلث دیگر متساوی باشد (بتفصیل

که در بحث آن شکل مذکور است) پس دو ضلع باقی هم از هر دو مثلث متساوی خواهند بود

ایضاً در مقاله اول شکل پنجم ثابت می‌کند که زوایای فوق قاعده مثلث متساوی الساقین (بتفصیلی که در بحث مذکور است) با هم

متساوینند لهذا این طور اشکال را (اثباتی) گفته‌اند

اصول اقلیدس

۱۸۹۸

اقلیدس پیش از تبیین مقالات جهت تفهیم مطالب هندسیه قواعد و اصطلاحاتی چند که مراد از آنها حدود - علوم و متعارف - و اصول موضوعه باشد و در مقالات آتی الیه است قرار داده و تسلیم نموده که حفظ آن برای طالب علم انفع باشد و استغناء از مقاصد سهل - از این اصول انواع مضامین که در مقالات ذکر شود دریافت گردد

حدود

(۱) نقطه آن است که اجزا نداشته باشد یعنی مقدار نداشته باشد

(۲) خط فقط طول دارد بغیر عرض

هر چند نقطه و خط که مراد باشد مقدار و عرض ناممکن و لکن در اقلیدس منظور اینست که ملحق نباشد یعنی نقطه هندسیه مقام دارد مقدار ندارد - و لکن خط هندسیه در عرض مقام دارد نه مقدار یعنی عرض ندارد - مثلاً فرض کن دو پارچه سفیدی بگر سبزی واقع شده است پس آن حدی که فاصل است میان سفیدی و سبزی همان است خط هندسی که فضا را بین این دو چیز با احتاط نگه داشته

چهره که چیزی را بر سطحی برادران دارد یعنی سفید یا بزرگ باشد هر چه میسر است از آنست که هر چه در زیر یا بیرون یک ترازو عین کورت محدود و معین سازیم و حال آنکه ناممکن است فرضاً هرگاه آن حد را که در سفیدی و سبزی است منقاط بسیار بزرگ معین سازیم مستمم است خط منقوطه مذکوره از دو حال بیرون نخواهد بود یا بر سطح سفیدی واقع شود و یا اینکه بر سطح سبزی -

در صورت اول بر وسط سفیدی خواهد بود و در شقی ثانی از اجزاء کل سبزی محقق - از این وضاحت منتهی شود که خط هندسی مقام دارد و لکن مقدار ندارد -

همین شوق برای نقطه هندسیه هم کافی است که این مقام دارد نه مقدار - زیرا که اجزاء هر خط مرکب از نقاط است پس هرگاه مقداری یعنی جسمی برای نقطه منظور باشد همان مقدار مساوی برای خط هم باقی خواهد بود و حال آنکه مذکور شد خط هندسیه عرض ندارد بلکه برای جزو آنهم که نقطه هندسیه باشد مقدار نیست -

(۳) خط مستقیم نقطه می شود و آن نقطه را طرف گویند

(۴) خط مستقیم آن خط را گویند که در نقاط اطراف خود موازی باشد

یست و بلند نباشد

خط دوفوع است مستقیم و منحنی = مستقیم است که چون از نقطه ابتدائیه خود متحرک
و ممتد شود سمت خود را تغییر ندهد چنانچه تعریف شد -
خط منحنی است که چون از نقطه ابتدائیه خود متحرک و ممتد شود بی هم از سمت
خود انحراف نماید مثلاً خط محیط دایره منحنی است

(۵) سطح آن بسیط را نامند که طول و عرض هر دو داشته باشد -

(۶) سطح منتهی بخط می شود که از آن طرف سطحی گویند

(۷) سطح مستوی است که هرگاه در آن دو نقطه یعنی دو نقطه تعیین شود و آن
دو نقطه را بخط مستقیم وصل کند خط مذکور بالتام در آن سطح
واقع شود -

(مثلاً سطح دایره و سطح مربع و امثال آن سطوح مشهورند) -

(۸) زاویه عبارت از تماثل و خط است که بربك نقطه متماثل شوند و در
يك جهت نباشند -

(۹) زاویه مستطی مستقیمه الخطین عبارت از تماثل و خط مستقیم است

که در يك نقطه متماثل شوند و در يك جهت نباشند

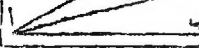
در دو فقره مذکوره یعنی هشتم و نهم تعریف زاویه شده فرق بین این هر دو اینست که در دو
فقره هشتم مطلقاً زاویه را تعریف نموده قید خطوط مستقیمه ننهادند چه ممکن است
از تماثل شدن دو خط منحنی یا یکی منحنی و دیگری مستقیم زاویه تشکیل یابد -

اما در زاویه فقره نهم قید استقامت خطین است و در اقلیدس بحث همین زاویه میباشد لهذا
جهتاً خصصاً بجای زاویه مستطی مستقیمه الخطین تنها لفظ زاویه کافی خواهد بود -

و اما اینکه در يك جهت نباشند عبارت از اینست که تماثل خطین این هشتم (ب) - (نباشد چه
در این صورت پس از اتصال خطین زاویه متشکل گردد بلکه خطی فاصیل خواهد شد -

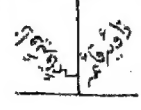
زاویه را بر حرف موسوم سازند یعنی يك حرف را بر رأس زاویه و دو حرف دیگر را بر دو ساق
آن نویسند و چون خواهد تعریف آن زاویه نمایند حرف را بر رأس زاویه و دو حرف دیگر را بر دو ساق
مثلاً زاویه راجح (ا) یعنی زاویه که از تماثل خط راجح (ا) و راجح (ب) تشکیل یافته است

انصافاً زاویه (د) یعنی زاویه که از تماثل خط (د) و (ب) تشکیل یافته است
ایضاً زاویه راجح (ب) یعنی زاویه که از اتصال خط راجح (ا) و راجح (ب) تشکیل شده است

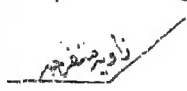


هرگاه هر زاویه در هر طرف موسوم نمیشد در تفهیم مطالبه وقت لازم میرسید و زاویه معلوم
 و بیجان زوایای غیر معلوم میماند
 گاه باشد که فرای آن شاهد حال است آنجا بیک فرمایند
 مثلاً زاویه \angle س

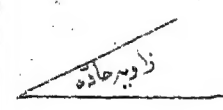
(۱) زاویه قائمه - چون بر خط مستقیم خط مستقیم دیگر قائم شود هشتی
 که در دو جانب خود دو زاویه متساوی تشکیل دهد یکی از این دو
 زاویه را زاویه قائمه نامند و آن خط مستقیم را که بر مستقیم دیگر
 قائم شده است عمود گویند



گاه چنانچه خطی از زاویه را فقط و آنجا بلفظ قائم کنند
 (۱۱) زاویه که نسبت بقاعده فرجاش بیشتر باشد یعنی واسع
 باشد از زاویه منفرجه گویند



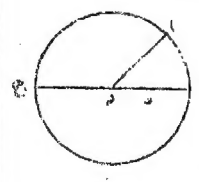
(۱۲) زاویه که نسبت بقاعده فرجاش کمتر باشد
 آنرا زاویه حاده گویند



(۱۳) حد = یعنی طرفی که آنجا هر چیز نباشد

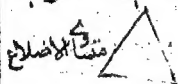
(۱۴) شکل = آنست که بیک خط یا خطوط متعده محدود باشد

هرگاه از اتصال دو خط در یک نقطه زاویه متشکل گردد و در دو طرف دیگر موسوم
 نباشد آنرا شکل بتوان گفت زیرا که خط را احاطه نکرده است



(۱۵) دایره = آن شکل مسطح را گویند که بیک خط
 که آنرا محیط نامند محدود باشد
 در میان آن نقطه باشد که از آن نقطه هر دو خط
 محیط میگردند و بالتألیف المقدار باشند

(۲۳) کثیر الاضلاع = آن شکل را گویند که زیاده از چهار خط از آنجا نباشد



(۲۴) مثلث متساوی با اعتبار اضلاع سه قسم است

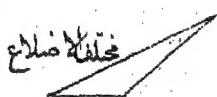
(۲۵) مثلث متساوی الاضلاع آنست که سه ضلع

آن با هم متساوی باشند



(۲۶) مثلث متساوی الساقین آنست که دو ضلع

آن با هم متساوی باشند



(۲۷) مثلث مختلف الاضلاع آنست که هر سه ضلع

آن با هم متساوی نباشند

(۲۸) با اعتبار زوایا نیز مثلث به سه قسم است



(۲۹) مثلث قائم الزاویه آنست که یک

زاویه آن قائمه باشد

(۳۰) مثلث منفرجه الزاویه آنست که

یک زاویه آن منفرجه باشد



(۳۱) مثلث حاد الزاویه آنست که زاویه

آن حاده باشند



مثلثی که یک زاویه آن قائمه باشد و نیز مثلثی که یک زاویه آن منفرجه باشد باقی دو زاویه آن هر مثلث حاده خواهند بود

بنابرین باید هر مثلث لابد دو زاویه حاده داشته باشد

هر ضلع مثلث را قاعده توان گفت در این صورت زاویه که مقابل قاعده باشد رأس مثلث است

ضلع اقصی مثلث متساوی الساقین را غالباً قاعده گویند

در مثلث قائم الزاویه دو ضلع مستقیم که تشکیل زاویه قائمه نموده اند یکی را از خطین



قائم و تا فی را عبور کنید
و خط مستقیم که مقابل قائمه می باشد و تر خوانند
(باعث اصلاح و زوایا اشکال چهار گوشه می شود)

(۳۰) مربع از شکل چهار گوشه را گویند که اصلاح آن با هم متساوی باشد
و زاویه آن قائمه باشد



(۳۱) مستطیل یا قائم الزویه آن شکل چهار گوشه را

گویند که زاویه آن قائمه باشد
ولکن اصلاح آن با هم متساوی نباشند
(اکثر مستطیل را قائم الزویه گویند)

(دو زینقه اصلاح یک اصلاح متقابل آن متساوی و از زوایای قائم باشد قطعات
باقی زوایای آن قائمه خواهند بود)



(۳۲) مربع = آن شکل چهار گوشه را گویند که

چهار ضلع آن متساوی باشند لکن زاویه آن قائم نباشد

(متوازی الاضلاع) (شب مربع) آن شکل چهار گوشه را

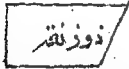
گویند که دو ضلع متقابل آن با هم متساوی باشند



اما زاویه آن قائم نباشد

(۳۳) ذوزنقه = آن شکل چهار گوشه را گویند که دو ضلع

آن متوازی باشند و ضلع دیگر متوازی نباشند



اشکال چهار گوشه که نه اصلاح متقابل آن متوازی و نه متساوی باشند از اشکال اخیر فز نامند

(۳۴) خطوط مستقیم متوازی = آن دو خط را گویند که از

دو طرف خود با هم فاصله می گیرند و در تمام اوقات موازی باشند

قد استقامت خطوط از اینجاست که مجاره کالسکه و خانه (ریلوی) که در وسط آهن
میباشند با هم متوازن نباشند اما مستقیم یعنی در جمیع نقاط عمده خود در قاع از هم دیگر
مستساو و متوازن نباشند چه گاه چنین نباشد عبور کالسکه از روی آن متعذر و ناممکن است
ولکن در هر نقطه مستساو خود مستقیم نباشند (کالسکه) مستساو و متوازن
هرگاه دوازده یا بیشتر این صفت باشند یعنی متساوی مرکز و سطوح آنها غیر مستساو با
پس خطوط محیطه آنها متوازن غیر مستقیم میباشند.

اصول موضوعه

(یعنی مطالبی که فرض نموده بر آن عمل می‌کنیم)

فرض کن که ما اختیار داریم =

- (۱) از هر نقطه که بخواهیم تا نقطه دیگر خط مستقیم خارج نماییم.
- (۲) خط مستقیم محدود و دیر با مستقامتا هر کجا که خواهیم متمم نماییم.
- (۳) از مرکز تا هر فاصله که خواهیم دوازده رسم نماییم.

علم مستساو

یعنی مطالبی که با همیته باشد - در تصدیق تأمل نباشد و لزوم
استنباط از خارج نباشد.

- (۱) چیزهایی که بیک چیز مساویند آن چیزها با هم متساوی میباشند

مثلاً فرض کن خط (ا) مساوی خط (ب) و خط (ب) مساوی
خط (ج) پس خط (ا) مساوی خط (ج) خواهد بود

- (۲) هرگاه بر یک خط متساوی افزوده شود چیزهای متساوی

حاصل آنها نیز متساوی خواهد بود.

- (۳) مثلاً فرض کن (ا) و (ب) با هم متساوی و بر (ا) مقدار (ج) را بپردازیم (ج) مساوی
هرگاه از چیزهای متساوی کشیده شود چیزهای متساوی آنچه باقی

يك جانب خود را كنار دو قائمه تشكيل نمايد
 پس هرگاه آن خط بي هم امتداد پيدا كند
 در خارج آن سمتي كه تشكيل و زاويه كنواز
 دو قائمه نموده اند در يك جا با هم وصل و متقاطع خواهند شد -
 (مراد اينست خطوط مستقيم كه بصفت مذكوره اند متوازي باشند)

اين مقاله در سه فصل منقسم است
 در فصل اول از شكل اول تا شكل (۲۶) خواص مثلثات را بمحاذ اضلاع و مساوات
 (از حيث انطباق) و غير مساوات زوايا بيان شده است -
 در فصل دوم از شكل (۲۷) تا شكل (۳۴) از خواص خطوط متوازي و متوازي الاضلاع
 بحث شده است -
 در فصل سوم از شكل (۳۵) تا شكل (۴۸) مساوات و متوازي الاضلاع مع مثلثات
 بمحاذ سطوح (يعني از حيث انطباق) و ثبوت مساوات مربع عمود و قائمه
 مثلث قائم الزاويه مع مربع وتر ذكر شده است -
 در اين مقاله جهت توضيح علامت اشكال اين حروف استعمال شود -
 آ ب ج د ه ص ط ع ق ل م ن ر ي ط يعني ابجد سطره قلمي -
 و هكاهم زوهر نیز صفر (ه) يعني حلقه صبيان خالي بكار برده آيد -

سؤالات متعلقه با اصول علم هندسه

- (۱) نقطه را چه قسم تعريف كنند - چه چيز است در آن و چه چيز در آن نيست
- (۲) هرگاه نقاط هندسيه را على الاتصال در يك قطار كجاء دهند يا از
 آنها خط مستقيم پيدا خواهد شد - و هرگاه ميشو چه قسم خواهند بود
- (۳) خارج كن دو خط را قسيمي كه بر دو نقطه تقاطع نمايند - و يا
 ممكن است اخراج دو خط مستقيم كه بر دو نقطه متقاطع باشند
- (۴) خط مستقيم را (اقلیدس) چه قسم تعريف نموده است -
- (۵) هرگاه خطوط مستقيم هندسيه را على الاتصال در قريه ديگر كنند

ایا از آنها سطح متشکل خواهد شد یا نه - هرگاه می شود و به آن چیست
(۶) هرگاه در سطح مستود و نقطه را معین نموده بمخط مستقیم وصل

نمایم آن خط مستقیم در کجا واقع شود
هرگاه خط مستقیم مذکور امتداد
پیدا کند مقدار امتداد آن کجا واقع خواهد شد -

(۷) بر نقطه (د) سه خط مستقیم یعنی (دا) و (دب)

و (دج) موصول میشوند =

بیان کن زوایای متلاثر را که از آنها متشکل شده اند یعنی

در میان (دا) و (دب) و در میان (دب) و (دج) و در میان (دج) و (دا)

و آن قسمیکه زاویه (ا) را توان تعریف نمود بیا کن و نیز در

صورتیکه زاویه (ادب) و (دب دج) را جمع کنیم از آنها کدام

زاویه متشکل خواهد شد -

(۸) در این شکل اسم و زاویه قائده و حاوی آن صفر را
بیا کن -



(۹) آیا کافی خواهد بود یا در تعریف خطوط متوازی صرف همین فقره

که بگوئیم آنها از دو طرف هر قدر امتداد پیدا کنند با هم وصل نشوند

برای کافی نمودن سطح چند خط اقل از آن باشد - (در میان جواب را بگو)

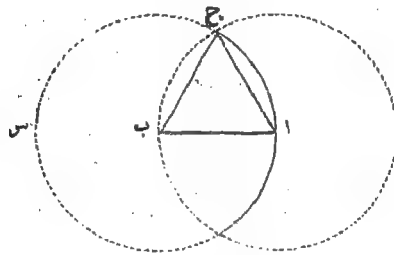
(۱۱) چه امتیاز است میان لفظ محیط و دائره -

(۱۲) هرگاه نقطه در دائره واقع شود ثابت کن که فاصله آن از مرکز آن نقطه خوا

از آلات هند استعمال مسطر (خط کش) و پرگار را اقلیدس بیان کرده
ولکن بر محل لزوم و الاطرار مرسوم استعمالی آن روا باشد
پس زحمت بکاشایان از اشکال فضول بود بچنان محل خود معلوم گردد

شکل اول عملی

بر خط مستقیم مفروض بسا مثلث متساوی الاضلاع



فرض کن (اب) خط مستقیم مفروض

و مقصود اینست که بر خط (اب) مثلث متساوی الاضلاع منقسم گردد

وضع شکل = (بجک اصول ۳) از مرکز (ا) بفاصله (اب)

بسا دائره (بج د) را و از مرکز (ب) بفاصله (ب ا) بسا دائره

(ج س) را (بجک اصول ۱) از نقطه (ج) که محل تقاطع دایرهین

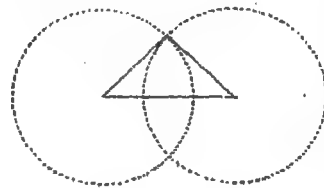
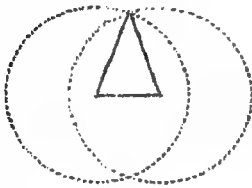
خارج کن خط مستقیم (ج ا) و (ج ب) را

پس (اب ج) مثلث متساوی الاضلاع خواهد بود

ثبوت = چونکه (ا) مرکز دایره (بج د) است

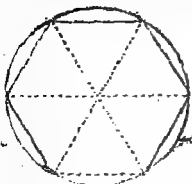
لذا (بجک حد ۵ ا ب) و (ج) با هم متساویند

ایضا چونکه ب مرکز دایره (ا ج س) است
 لهذا (ب ج) و (ب ا) با هم متساوی میباشد
 و اما در فوق ثابت شد که (ا ج) و (ا ب) با هم متساویند
 و چونکه (ب ج م) (ب ج ا) چیزهاییکه بیک چیز مساویند آن چیزها با هم متساویند
 بنا بر این (ا ج) و (ب ج) و (ب ا) با هم متساوی میباشد
 لهذا مثلث متساوی الاضلاع مرتیم گردید و مراد همین بوده که



تفہیم

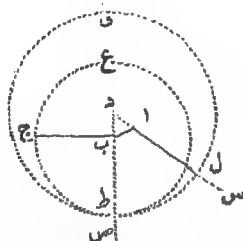
- (۱) هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوا یا میباشد که
- (۲) محیط دو دایره متساویه =
 (اول) هرگاه بر مرکز هر یک یک مثلث مرتیم بر مرکزین و ماس نقطه تقاطع دایرین متساوی الاضلاع خواهد بود چنانکه در شکل ثابت شد که
 (ثانی) هرگاه بر مرکز هر یک یک مثلث مرتیم بر مرکزین و ماس نقطه تقاطع دایرین متساوی الاضلاع خواهد بود یعنی در صورتیکه مرکز هر یک خارج از محیط دایرین باشد پس مثلث مرتیم بر مرکزین و ماس نقطه تقاطع دایرین متساوی الاضلاع منفرجه خواهد بود یعنی استخراج زاویه را س آن زیاد خواهد بود نسبت به یکی از باقی زاویین
 (سوم) هرگاه مرکز هر دو دایره در سطح هر یک باشد پس مثلث مرتیم بر مرکزین و ماس نقطه تقاطع دایرین حاده الزوا یا خواهد بود یعنی استخراج زاویه را س آن کمتر خواهد بود نسبت به یکی از باقی زاویین
 محیط هر دایره از سمت محیط یا مقعر =
- (۳) (اول) کجا نشان شد مثلث متساوی الاضلاع را
 داریم که هر ضلع آن مساوی نیم قطر باشد که
 (ثانی) کجا نشان شد فوس را در مرکز و فوس مساوی نیم قطر باشد



(۴) (سوم) کجا پیش تمام شدن دارد که هر ضلع آن بمساحتی قطری باشد
این شکل نیز دایره که مادر اشکال هندسی میباشد دارای خواص بسیار است که در
مقاله آتی به عمل خود مذکور و مبین خواهد شد و اینجا محض تشویش مبتدیان
اشعارت رفعت

شکل (۲) عکس

از نقطه معلوم خارج کن خط مستقیم تا اگر مساوی باشد
با خط مستقیم فرض



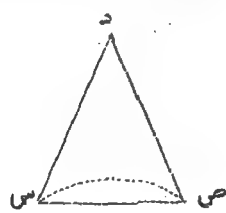
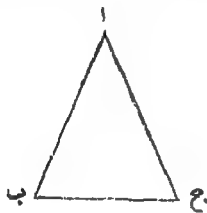
فرض کن (۱) نقطه معلومه و (ب ج) خط مستقیم مفروض مطلوب اینست که
از نقطه (۱) خط مستقیمی بساوی خط مستقیم مفروض خارج شود
وضع شکل = (بحکم اصول ۱) (ا و ب) را بخط مستقیم وصل کن و (ب ج) را
ش (۱) بشا بر (اب) مثلث متساوی الاضلاع (د اب د)
و (بحکم اصول ۲) خارج کن (د ا و د ب) را تا نقطه (س) و (ص)
و (بحکم اصول ۳) از مرکز (ب) بفاصله (ب ج) بشا دائرة (ج ط ع) را که
(د ص) را بر نقطه (ط) قطع نماید

ایضاً از مرکز (د) بفاصله (د ط) بسا دائره (ط ق ل) را که (دس) را بر نقطه (ل) قطع
شود چونکه (ب) مرکز دائره (ج ط ع) است پس (ب س ج) بمسا (ب ط) خواهد بود
ایضاً (ب ج ک) حد (۱۵) چونکه (د) مرکز دائره (ط ق ل) است پس (د ل) بمسا (د

مُتساویان دو چند باشد نسبت بقاعدۀ (۳)
 پیدا کن خط مستقیم یکی را که مساوی باشد با مجموع خطین و فرق آن (۴)
 چون مجموع خطین را بر فرق آن بیفزایند خطی که حاصل شود دو چند خط ا طول خواهد
 بود و هرگاه از مجموع خطین فرق آنها را تفریق نمایند خطی که حاصل شود دو چند خط
 ا قصر خواهند بود (۵)
 توضیح = چون مقدار اقل را از اکثر تفریق نمایند آنچه فاضل آمد فرق مقدارین نامند (۶)
 مثلاً هرگاه خطی را که طولاً یک ذرع است از خط دیگری که طولاً آن یک ذرع و نیم است تفریق
 پس نیم ذرعی که فاضل مانده است فرق خطین می باشد (۷)

شکل (۴) اثباتی

هرگاه دو ضلع مثلثی باد و ضلع مثلث دیگر با نظائر خود مُتساوی
 باشند در زوایای این اضلاع هم مُتساوی باشند پس هر دو قاعدۀ آن
 یعنی ضلع سوم از هر مثلثی با هم مُتساوی خواهد بود و نیز زوایای
 مُتشکله این اضلاع با نظائر خود مُتساوی خواهند بود (۸)



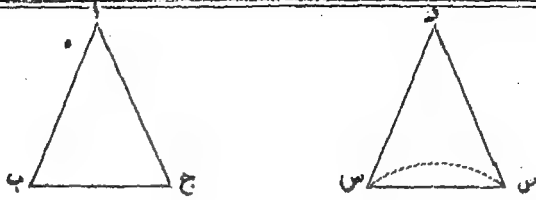
فرض کن در دو مثلث (ابج) و (دس ص)

دو ضلع (اب) و (دس) و (اج) و (دص) و (بج) و (دص) هر یکی با نظیر خود مساوی

یعنی (اب) بمساوی (دس) و (اج) بمساوی (دص) (۹)

و زاویۀ (باج) بمساوی زاویۀ (س دص) است (۱۰)

بنابرین قاعدۀ (بج) بمساوی قاعدۀ (س ص) خواهد بود (۱۱)



و مثلث (ا ب ج) بمساوی مثلث (د س ص)
 و زاویای متقابل اضلاع از هر دو مثلث با نظر خود نیز متساوی خواهند بود
 یعنی زاویه (ا ب ج) بمساوی (د س ص) و زاویه (ا ج ب) بمساوی (د ص س) خواهد بود
 ثبوت = بدلیل اینکه هر گاه مثلث (ا ب ج) بر مثلث (د س ص) منطبق
 قسیمی که نقطه (ا) بر نقطه (د) و خط مستقیم (ا ب) بر خط مستقیم (د س) منطبق
 چونکه (ب موجب مفروض) (ا ب) مساوی است با (د س) —
 لهذا نقطه (ب) بر نقطه (س) منطبق خواهد شد —
 و چون (ا ب) بر (د س) منطبق باشد قطعاً خط (ا ج) بر (د ص) منطبق خواهد شد
 زیرا که (ب موجب مفروض) زاویه (ب ا ج) مساوی است با زاویه (س د ص) —
 اینصاف چونکه (ب موجب مفروض) (ا ج) بمساوی (د ص) است
 لهذا نقطه (ج) بر نقطه (ص) منطبق خواهد شد
 و اما انطباق نقطه (ب) بر نقطه (س) ثابت و مذکور شد
 و چون نقطه (ب) بر نقطه (س) و نقطه (ج) بر نقطه (ص) منطبق باشد
 قطعاً قاعده (ب ج) بر قاعده (س ص) منطبق خواهد شد —
 و هرگاه چنین نباشد یعنی قاعده (ب ج) بر قاعده (س ص) منطبق نباشد
 و مع ذلك دو خط مستقیم (ب ج) و (س ص) یک سطح را احاطه نمایند

این اثبات (بجمله علم ۱) ناممکن است.

لذا (بجمله علم ۸) قاعده (بج) بر قاعده (دس ص) منطبق
و مثلث (ابج) با مثلث (دس ص) از هر حیثیت مساوات شد و منظور
همین بوده است.

تفهیم

- (۱) هر مثلثی شش جزو دارد یعنی سه ضلع و سه زاویه.
- (۲) دو مثلث را هنگامی متساوی گویند که بر یکدیگر منطبق شوند. زیرا که در این صورت هر
جزوی از یک مثلث مساوی خواهد بود با جزو مثلث دیگر موافق نظر خود.
- گاه باشد که دو شکل با هم متساوی باشند اما منطبق نشوند (بین تفهیم علم ۸).

شکل (۵) اثباتی

زوایای فوق قاعده مثلث متساوی الساقین با هم متساوی میباشند و هرگاه
مثلث بقدری که بر یک سمت شود پس و یکا طرف تحت قاعده هم متساوی خواهند بود.

فرض کن (ابج) مثلث متساوی الساقین و در ضلع

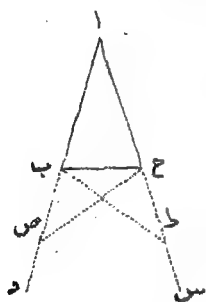
ان اب واج با هم متساوی میباشند.

و نیز فرض کن ساقین ان (اب) و (اج) تا نقطه

(د) و (س) خارج شده اند

بنابرین زاویه (ابج) مساوی زاویه (اجب)

خواهد بود.



و نیز زاویه (دبج) مساوی زاویه (سج ب) خواهد بود.

وضع شکل = در خط رب (د) معین کن نقطه را مثل (ص).

و (بجمله ش ۳) از خط اطول (اس) قطع کن (ا ط) را که مساوی باشد با خط کوچک (اص).

وصل کن (ص ج) و (ط ب) را (اختصار این کلمه است که از نقطه ص الی نقطه ج) و از نقطه ط الی (ب) خطی خارج کن.

ثبوت = چون (ا ط) مساوی اص معلین شده است.

و (موجب مفروض) (ا ب) مساوی اج مرتقم

لهذا دو ضلع (ص ا) و (ا ج) با ضلعین (ط ا) و (ا ب) متساوی میباشد هر یکی با نظیر خود موافق

و زاویه (ص ا ج) که در میان اضلاع مذکور است

نسبت بهردو یعنی (ص ج) و (ا ط ب) مشترک میباشد

از اینجهت (بجمله ۴) قاعده (ص ج) مساوی است با قاعده ط ب

و مثلث (ص ج) مساوی است با مثلث (ا ط ب).

و باقی زوایای یک مثلث متساویند یا باقی زوایای مثلث دیگر هر یکی با نظیر

خود که در مقابل اضلاع متساویر واقع شده

یعنی زاویه (ا ج ص) مساویست با زاویه (ا ب ط).

و زاویه (ا ص ج) مساوی است با زاویه (ا ط ب).

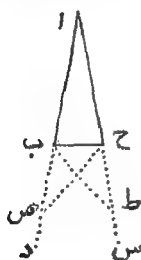
زیرا که تمام خط (ا ص) مساویست با تمام خط (ا ط).

و (موجب مفروض) (ا ب) و (ا ج) با هم متساویند

لهذا (بجمله ۳) بقیه حصص یعنی (ب ص) و (ج ط) با هم متساوی میباشد

و اما متساوی بودن (ص ج) و (ط ب) ثابت و مذکور شد

بنابر این ضلعین (ب ص) و (ج ص) مساویند با ضلعین (ج ط) و (ط ب) متساوی



بانظار خود.

و در فوق ثابت و مذکور شد که زاویه (ب ص ج) مساویت با زاویه (ج ط ب) لهذا (مجاور ش) - مثلث (ب ص ج) مساویت با مثلث (ج ط ب) - و زوایا آنها که در مقابل ضلاع متساویر واقعند بانظار خود متساوی باشند یعنی زاویه (ص ج ب) مساویت با زاویه (ط ج ب) و زاویه (ب ج ص) مساویت با زاویه (ج ب ط) و چون پیش از این ثابت شد که تمام زاویه (ب ط ج) مساویت با تمام زاویه (ج ب ط) و حصص آنها یعنی زاویه (ب ط ج) و (ج ب ط) و (ب ج ص) و (ج ص ب) با هم متساوینند لهذا بقیه زاویه یعنی (ب ج ج) مساویت با بقیه زاویه (ج ب ج) و این زوایا برابر (ج) که قاعده مثلث (ب ج ج) است واقعند و نیز در محیط ثابت شد که زاویه (ص ج ب) مساویت با زاویه (ط ج ب) و این زوایا تحت قاعده (ب ج ج) میباشند.

لذا زوایای فوق قاعده الخ

تفہیم = هرگاه در مثلثی دو زاویه آن غیر متساوی باشند بر اضلاع متقابل آنها تیرغیر متساوی خواهند بود

مشق

- (۱) هرگاه بر قاعده (ب ج ج) در یک جانب یا در جوانب متقابل آن دو مثلث متساوی الساقین (ب ج ج) و (ج ب ج) رسم شوند ثابت کن که زاویه (ب ج ج) مساوی زاویه (ج ب ج) میباشند.
- (۲) متساوی بودن زوایای متقابل در شکل معین را ثابت کن.
- (۳) (ب ج ج) خط مستقیم است مفروض (ج ج) نقطه مفروضه که خارج از آن است پیدا کن در (ب ج ج) نقاطی را که فاصل آنها از (ج ج) متساوی باشد با خط مستقیم (ج ج) و ادا در هر حالت توان چنین نقاطی را پیدا نمود.
- (۴) هرگاه (ج ج) را سه مثلث متساوی الساقین (ب ج ج) و (ج ب ج) و (ب ج ج) با طرف قاعده آن معلوم باشد پیدا کن (ب ج ج) انتهای طرف دیگر را در صورتیکه اقسام آن مثلث بر خط مستقیم (ج ج) منطبق باشد.

فرض کن (ا ب) اطول است از (ا ج) —

پس (بحکم ش ۲) از خط (ب) بقطع کن (ب د) که مساوی خط اقصی (ا ج) باشد
و صل کن د ج را

ثبوت = چون در د و مثلث (د ب ج) و (ا ج ب) ضلع (د ب) برابر
(ا ج) هر قسم شده است

و (ب ج) در د و د و مثلث مشترک است

بنابر این ضلعین (د ب) و (ب ج) مساویند با ضلعین (ا ج) و (ا ج ب) هر
یکی با نظیر خود —

و زاویه (د ب ج) مساوی است با زاویه (ا ج ب)

لذا (بحکم ش ۴) ضلع د ج مساویت با ضلع (ا ب)

و مثلث (د ب ج) برابر است با مثلث (ا ج ب)

یعنی جزو مساوی گز است و این (بحکم علم ۹) باطل —

بنابر این (ب موجب فرض اول) (ا ب) و (ا ج) غیر متساوی نباشند

یعنی (ا ب) و (ا ج) با هم متساویند —

لذا هرگاه در مثلثی دو زاویه الخ

تفہیم = این شکل یعنی ششم عکس شکل پنجم است —
شکل را عکس شکل دیگر نگاه گویند که دقیقاً یک شکل در شکل دیگر فرض نموده شود
مثلاً در شکل پنجم فرض شده است که ضلعین مثلث معلومه متساویند و نتیجتاً آن حاصل
شد که زاویاتین نیز متساوی میباشند —
و در شکل ششم فرض شده است که دو زاویه مثلث معلومه متساویند و نتیجتاً
شده است که ضلعین آن هم متساوی میباشند —
کذا لک هرگاه در معوی شکل فرض متعده باشد عکس آن نیز متعده خواهد بود —

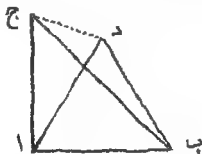
اقلیدس غالباً دعوی اشکال را معکوس نموده ثابت میکند ولیکن قاعده کلیه برای آن قرا
نداده است که دعوی هر شکل بطور معکوس صحیح باشد.
مثلاً اگر دعوی شکل هشتم درست نباشد یعنی هرگاه سه زاویه مثلثی
مساوی باشند یا سه زاویه مثلث دیگر از زمینیت که سه ضلع این یکی هم مساوی
باشد یا سه ضلع آن دیگری.
هرگاه در مثلثی دو ضلع آن غیر متساوی باشد پس زوایای مقابل آن هم غیر متساوی
خواهند بود.

مشق

- (۱) هرگاه در مثلث متساوی الساقین (ا ب ج) زاویه بین (ا ب ج) و (ا ج ب) تنصیف شوند
از خط (ب د) طرح کن که بر نقطه (د) موصول باشند ثابت کن مثلث (ب د ج) متساوی
الساقین است.
- (۲) در مثلثی که هر (ا ب ج) بر نقطه (ج) تقاطع نمایند ثابت کن مثلث (ج ب ج)
متساوی الساقین میباشد.

شکل (۷) اثباتی

هرگاه دو ضلع مساوی از دو مثلث بزرگ قاعده و بزرگ طرف آن
متساوی شده باشند و دو ضلع دیگر بر طرف دیگر آن قاعده منتهی
شوند ممکن نیست که این دو ضلع با هم متساوی باشند.



فرض کن (ا ب ج) و (ا د ب) دو مثلث معلوم و دو ضلع (ا ب ج) و (ا د ب)
که بر قاعده (ا ب) در نقطه (ب) منتهی شده اند با هم متساوی میباشند
در این صورت ممکن نیست که دو ضلع دیگر یعنی (ج ب) و (د ب).
که بر نقطه (ب) منتهی شده اند با هم متساوی باشند.

وضع شکل = وصل کن (ج د) را

اول در صورتیکه رأس يك مثلث خارج مثلث ديگر باشد

ثبوت = چون (ا ج) مساوی (د) فرض شده است

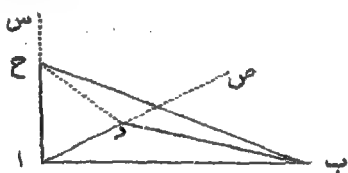
لهذا (ب حکم ش ۵) زاویه (ا ج د) برابر زاویه (ا ج) خواهد بود

ليكن (ب حکم علم ۹) زاویه (ا ج د) اوسع است نسبت به زاویه (ب ج د)

و كذلك فرجه (ا ج د) بيشتر است نسبت به زاویه (ب ج د)

بنابراین (ب حکم ش ۵) (ب ج) و (ب د) با هم متساوی نباشند

دوم در صورتیکه رأس يك مثلث داخل مثلث ديگر واقع باشد



مثلث ساز (ا ج) و (ا د) را الى (س) و (ص)

چون بموجب مفروض (ا ج) مساوی است با (ا د)

لهذا (ب حکم ش ۵) زاویه (س ج د) مساوی است با زاویه (ص ج د)

(زیرا که زوایای تحت قاعه (ج د) است)

ليكن (ب حکم علم ۹) زاویه (س ج د) نسبت به زاویه (ب ج د) اوسع است

زیرا که این جزو آن است

لهذا (ب حکم ش ۵) (ب ج) و (ب د) با هم متساوی نباشند

(سوم در صورتیکه رأس يك مثلث بر ضلع مثلث ديگر واقع شود)

در این صورت محتاج به اثبات نیست

هذه كاه و ضلع متساو الخ

تفهیم
(۱) بریک قاعده و در یک جانب آن ممکن نیست از قسم دو مثلث متساوی الاضلاع
(۲) بریک قاعده و در یک جانب آن ممکن نیست از قسم دو مثلث متساوی الساقین که همسان
آن برآید باشد با خط مستقیم مفروض

شکل (۸) اثباتی

در دو مثلث کاه ضلعین یک مثلث متساوی باشند با ضلعین
مثلث دیگر متوافق با نظائر خود و نیز قاعده هر دو مثلث با هم
متساوی باشند پس در آن کاه هر دو مثلث که از اضلاع متساوی تشکیل
یافته اند با نظائر خود متساوی خواهند بود



فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث معلومه اند
و دو ضلع آن (ا ب) و (ا ج) متساویند با ضلعین (د س) و (د ص) هر یکی متوافق
با نظیر خود

یعنی (ا ب) برابر (د س) و (ا ج) مساوی (د ص) است

و نیز قاعده (ب ج) مساوی قاعده (س ص)

بنابر این زاویه (ب ا ج) مساوی (س د ص) خواهد بود

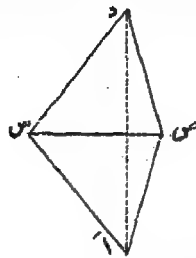
ثبوت = بدلیل اینکه هر کاه مثلث (ا ب ج) بر مثلث (د س ص)

منطبق شود

قس می که نقطه (ب) بر (س) و نیز خط مستقیم (ب ج) بر خط مستقیم (س ص) منطبق
 و چون که (ب) بموجب مفروض (ب ج) مساویت با (س ص) «
 لهذا نقطه (ج) بر نقطه (ص) منطبق خواهد شد «
 كذلك قاعده (ب ج) بر قاعده (س ص) منطبق خواهد شد «
 و همین طریق انطباق (ب ا) و (ا ج) بر (س د) و (د ص) بعمل می آید
 زیرا که هرگاه قاعده (ب ج) بر قاعده (س ص) منطبق باشد
 و لکن انطباق ضلعین (ب ا) و (ا ج) بر ضلعین (س د) و (د ص) واقع نشود
 یعنی بر مقام مختلف مثلاً بر (س ط) و (ص ط) واقع باشند
 در این صورت بزرگ قاعده و بزرگ سمت آن دو مثلث که تمام اجزا
 آنها از هر حیثیت با نظر خود متساوی باشند واقع شده اند
 و این (بحکم ش ۷) ناممکن است «
 بنابراین چون قاعده (ب ج) منطبق شود بر قاعده (س ص) قطعاً ضلعین
 (ب ا) و (ا ج) منطبق خواهند شد بر ضلعین (س د) و (د ص) «
 و چون زاویه (ب ا ج) منطبق شود بر زاویه (س د ص) «
 لهذا (بحکم علم ۱) با هم متساوی میباشند «
 لهذا در دو مثلث هرگاه ضلعین الخ

بعضی از مهندسین شکل هشتم را این

قسم ثابت نموده اند که لا اعلو است ^{هفتم} شکل



فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلثند و ضلعین (ب ا) و (ا ج) از یک مثلث
متساویند با ضلعین (س د) و (د س) از مثلث دیگر متوافق بانظر خود که

و قاعده (ب ج) مساوی با قاعده (س ص)

پس زاویه (ب ا ج) مساوی خواهد بود با زاویه (س د ص) که
وضع شکل = بحسبان یعنی منطبق ساز مثلث (ا ب ج) را بر مثلث (د س ص)
قسمیکه (ب) بر نقطه (س) و (ج) بر نقطه (ص) واقع شود
پس نقطه (ج) بر (ص) واقع خواهد شد که

ثبوت = زیرا که در مجموع فرض (ب ج) مساوی (س ص) است
فرض کن برای مثلث (ا ب ج) مقامی دیگر یعنی (ا س ص) (الف مفتوح ص)
پس هرگاه (د س) بر (س) و (ا د) بر (س) خط مستقیم نباشند
وضع شکل = وصل کن (د ا)

(اولی در صورتیکه (د ا) قطع کند (س ص) را)

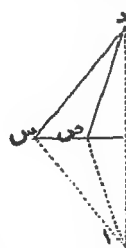
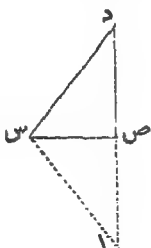
چونکه (س د) برابر است با (س ا) لهذا (ب ج م ش ۵) زاویه (د ا س) مساویت با زاویه (د ا ب)

ایضا چونکه (س د) برابر است با (س ا) لهذا (کل زاویه (س د ص) مساویت با کل
زاویه (س ا ص)

یعنی (س د ص) بمساوی زاویه (ب ا ج) میباشد که

(دوم) در صورتیکه (د ا) موصول شود با (س ص) بمسوده که

(سوم) در صورتیکه زوج اضلاع مثلاً (د س) و (س ا) در یک خط مستقیم واقعند

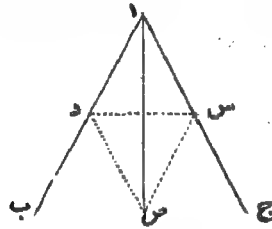


این هر دو صورت مثل صورت اول ثابت توان نمود که

- تفہیم
- (۱) مگر اگر اضلاع ثلاثی مثلث با اضلاع ثلاثی دیگر موافق نظیر خود متساوی باشند
آن مثلث از هر حیثیت با هم متساوی خواهند بود
- (۲) خطی که داس متساوی الساقین و نقطه وسط قاعده را وصل دهد زاویه داس را
تسویف خواهد نمود
- (۳) دویای متقابلہ شکل معین با هم متساوی میباشند و اقطار آن تسویف زوایا نمایند

شکل (۹) عکس

تسویف کن زاویه مستقیمه الخطین را یعنی تقسیم کن در دو
قسمت متساویہ



فرض کن (ب ج) زاویه مستقیمه الخطین است و مقصود اینست که
زاویه مذکور در دو حصه برابر منقسم شود -

وضع شکل = در (اب) نقطه را مثلاً (د) معین کن
و (بج) را (ج) از خط (اج) قطع کن مقدار (اس) را که برابر باشد با (اد)
وصل کن (د س) را
و (بج) را (ج) بر ضلع (س د) بساز مثلث متساوی الاضلاع (س د ج)
که محاذی (ا) باشد -
وصل کن (ا ص) را -

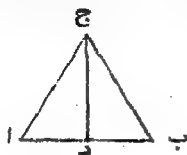
لهذا خط مستقیم (ص) منصف زاویه (ب ا ج) خواهد بود.
 ثبوت = بدلیل اینکه (د) مساوی (ص) مرتسم شده است
 لهذا (ص) نسبت به (د) و (ص) مثلث یعنی (د ص) و (س ص) مشترک است
 بنابراین ضلع (د ا) و (ص) مساویند با ضلعین (س ا) و (ص)
 هر یکی موافق با نظیر خود.
 و چون قاعد (د ص) مساوی قاعد (س ص) مرتسم شده است
 لهذا (ب ج ک ش) زاویه (د ص) مساویست با زاویه (س ص)
 لهذا تنصیف زاویه مستقیمه الخطین (ب ا ج) وسیله خط
 (ص) بعمل آمد و مقصود همین بوده.

تفصیلات

- (۱) مثلث (د ص) که بعید از (ا) مرتسم شده است از این جهت است که هرگاه بجانب
 (ا) ساخته میشد ممکن بود که نقطه (ص) بر نقطه (ا) منطبق شود پس در این صورت
 تنصیف زاویه بطریق مذکور ناممکن بود
 - (۲) خط (ص) بر (د س) عمود میاشد.
 - (۳) در (ص) هر نقطه که معین شود فاصله آن نسبت به (د) و (س) مساوی خواهد
 بود
 - (۴) زاویه (د ص) یا (ص س) را (ص) تنصیف میکند.
 - (۵) مگر است بجای مثلث مساوی (ا ص د) مثلث (ص س ا) مساوی الساقین ساخته
 میشود دعوی را ثابت کنیم.
- مشق تقسیم مثلث مساوی الساقین را در دو مثلث مساوی الزوایا.

شکل (۱) عملی .

تنصیف کن خط مستقیم عمودا
 یعنی تقسیم کن در دو قسمت متساوی



فرض کن Δ $ا ب د$ خط مستقیم معلوم و مطابق اینست که خط $(ا ب)$ در دو
حصه برابر منقسم شود.

وضع شکل = (بجمله ش ۱) بر $(ا ب)$ رسم کن مثلث متساوی الاضلاع
 $(ا ب ج)$ را.

و (بجمله ش ۹) تنصیف کن زاویه $(ا ج ب)$ را بوسیله خط مستقیم $(ج د)$
کرد $(ا ب)$ و نقطه $(د)$ برسد.

لذا $(ا ب)$ در نقطه $(د)$ تنصیف خواهد شد.

ثبوت بدلیل اینکه (بجمله حد ۲۴) $(ا ج)$ مساوی $ب$ مرتسم شده است
و در هر مثلث $(ا ج د)$ و $(ب ج د)$ خط مستقیم $(ج د)$ مشترک است
بنابرین ضلعین $(ا ج)$ و $(ب ج)$ مساویند با ضلعین $(ب ج)$ و $(ج د)$ متوافق
با نظائر خود.

و چون زاویه $(ا ج د)$ با زاویه $(ب ج د)$ متساوی مرتسم شده است
لذا قاعد $(ا د)$ برابر است با قاعد $(ب د)$.

لذا تنصیف خط مستقیم $(ا ب)$ در نقطه $(د)$ بعمل آمده میسر بوده است.

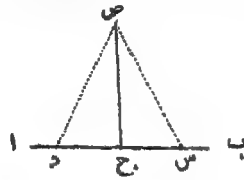
مشقی

- (۱) ثابت کن خط $(ج د)$ که تنصیف $(ا ب)$ میکند بر آن عمود است.
- (۲) بنام خط مستقیم $(ج د)$ بوسیله دایره چرخ توان تنصیف نمود.

- (۳) بر قاعده معلومه شش کن متساوی الساقین را قسمی که مجموع دو ضلع متساوی باشد
 آن مساوی باشد با خط مستقیم فرضی
 (۴) هرگاه در شکل هفتم متصف نمایم زاویه را با س کرد درج ب بر نقطه س و وصل
 شود ثابت کن که (ب س) مساوی ب د خواهد بود
 (۵) هر نقطه که از (ا و ب) بفاصله مساوی باشد آن نقطه در (ج د) واقع خواهد شد

شکل (۱۱) عملی

بر خط مستقیم معلوم و بر نقطه معلومه آن خارج کن
 خط مستقیمیکه بر خط معلومه مذکوره زاویه قائمه تشکیل نماید



فرض کن اب خط مستقیم معلوم و ج نقطه معلومه در آن
 مطلوب اینست که بر نقطه ج خط مستقیمی قائم شود
 که بر اب زاویه قائمه تشکیل نماید

وضع شکل = معین کن در (ج) نقطه را مثلاً (د)

و (ب) که ش (۳) ج س را مساوی ج د معین کن

و (ب) که ش (۱) بساز بر د س مثلث متساوی الاضلاع (د ص س) را

وصل کن ج ص را

بنابر این خط مستقیم ج ص که بر نقطه ج قائم شدن است

بر اب زاویه قائمه تشکیل خواهد نمود

ثبوت = زیرا که در ج برابر ج س مرسم شده است

در (ج ص) نسبت همد و مثلث (د ج ص) و (س ج ص) مشترک می باشد
 لهذا ضلعین (د ج) و (ج ص) متساویند با ضلعین (س ج) و (ج ص) متساو
 با نظیر خود

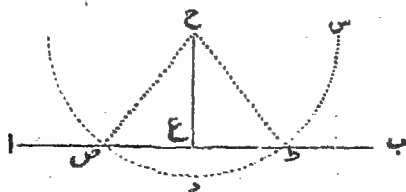
و نیز (بحکم حد ۲۴) قاعده د ص برابر است با قاعده س ص
 لهذا (بحکم ش ۸) زاویه (د ج ص) مساویت با زاویه (س ج ص)
 و این زوایا در دو جانب خط ر ج ص واقع شده اند
 لهذا (بحکم حد ۱۰) هر یکی از این زوایا یعنی (د ج ص) و (س ج ص) قائم می باشد
 و مطلوب همین بوده است

مشق

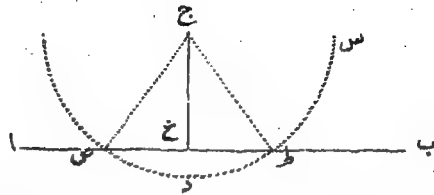
- (۱) در مثلث مفروضه (ا ب ج) تنصیف ضلع (ا ب) بر نقطه د و تنصیف ا ج بر نقطه س
 میشود و بر ا ب از نقطه د عمود د ص و بر ا ج از نقطه س عمود س ص قائم میشود
 ثابت کن که ص ا و ص ب و ص ج با هم متساویند
- (۲) بنا بر مثلث متساوی الساقین که قاعده زاویه باشد
- (۳) مثلث قائم الزاویه بسا که قاعده آن بقدر نصف وتر باشد

شکل (۱۲) عکلی

بر خط مستقیم غیر محدود و از نقطه معلومه که خارج از آن
 خط واقع باشد عمود قائم کن



فرض کن ا ب خط مستقیم معلوم که امتداد آن از هر دو طرف نامحدود است



و ج نقطه معلومه که خارج از آن خط واقع شده است -

مقصود اینست که از نقطه ج عمود بر اب قاشع شود -

وضع شکل = در جانب تحت اب معین کن نقطه را مثلا د

و بحکم اصول ۴ از مرکز ج بفاصله ج د بساز دایره (س ط ص) را

که با اب در نقاط ص و ط تقاطع نماید

و بحکم ش ۱ تنصیف کن (ص ط) را بر نقطه ع

وصل کن ج ع را

ط را خط مستقیم ج ع که از نقطه ج عمود شده است بر اب

عمود خواهد بود -

ثبوت = وصل کن ج ص و ج ط را

و چون (ص ع) بمسار ط مرتقم شده است

و ج ج در هر دو مثلث یعنی (ص ع ج) و (ط ع ج) مشترک است

لذا ضلعین (ص ع) و (ع ج) متساویند با ضلعین (ط ع) و (ع ج) متوافق با

و بحکم حد ۱۰ قاعده ج ص مساویست با قاعده ج ط

لذا بحکم ش ۱ زاویه ج ع ص مساویست با زاویه ج ع ط

و این زوایا در جانبین عمود ج ع میباشند

لذا (بحکم حد ۱۰) هر یکی از این زوایا یعنی ج ع ص و ج ع ط قائمباشند

و خط مستقیم که تشکیل آنها نموده است برابر اب عمود میباشد

لذا بر خط مستقیم اب از نقطه ج که خارج از آن بود عمود قائم شد

مشق

- (۱) هرگاه طول خط مستقیم غیر محدود نباشد بنماد رنگش شکل بر نقص واقع خواهد شد
- (۲) در مثلث متساوی الاضلاع خطوطی که بر نقاط وسط اضلاع از زوایای متقابل قائم شوند ثابت کن که با هم متساوی خواهد بود
- (۳) اقطار شکل معین هدی که بر زاویه قائمه تقاطع نمایند
- (۴) هرگاه اقطار ذو الرباع الاضلاع هدی که بر زاویه قائمه تقصیف نمایند آن شکل مربع خواهد بود
- (۵) خطوطی که تقصیف نمایند زوایا قائمه متساوی الساقین را از آنها نیز متساوی الساقینی مرئوس خواهد شد
- (۶) خطوطی که نقاط وسط اضلاع متساوی الاضلاع را وصله هند را از آنها نیز متساوی الاضلاع مرئوس گردد

شکل (۱۳) اثباتی

خط مستقیمیکه بر خط مستقیم دیگر در یک جهت تشکیل زوایا میدهد آن زوایا از دو حال خارج نباشد - یا هر یکی از آنها زاویه قائمه و یا اینکه مجموع هر دو زاویه بمسأد و قائم خواهند بود



فرض کن اب خطی است مستقیم و بر خط مستقیم ج د در یک جهت زاویه

ج ب ا و اب د تشکیل میداد

بنابرین هر یکی از این زوایا قائم خواهد بود یا اینکه مجموع هر دو زاویه قائم خواهند بود



ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه زاویه (ج ب ا) مساوی باشد با زاویه (ب د ج)

پس (بجک حد ۱) هر یکی از آنها قائمه می باشد.

لیکن هرگاه زاویه (ج ب ا) مساوی زاویه (ب د ج) نباشد

پس (بجک حد ۱) خارج کن (ج د) از نقطه (ب) ب خط مستقیم (ب س) را که بر

(ج د) زاویه قائمه پیدا کند.

پس (بجک حد ۱) (ج ب س) و (س ب د) دو قائمه اند.

و زاویه (ج ب س) مساویت با مجموع زاویه (ج ب ا) و (ا ب س)

میفرایند هر یکی از این متساویات زاویه (س ب د) را

پس (بجک حد ۲) مجموع زاویه (ج ب س) و (س ب د) مساوی

با مجموع زاویه

یعنی (ج ب ا) و (ا ب س) و (س ب د)

ایضا چونکه زاویه (د ب ا) مساویت با زاویه (د ب س) و (س ب ا)

میفرایند هر یکی از این متساویات (ا ب ج) را

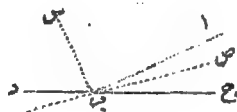
پس (بجک حد ۲) زاویه (د ب ا) و (ا ب ج) مساویند با زاویه

یعنی (ب س) و (س ب ا) و (ا ب ج) لیکن در فوق ثابت و مذکور شد

که زاویه (ج ب س) و (س ب د) مساویند بهین زاویه

لذا زاویتین (ب ج س) و (س ب د) مساویند بازویتین (د ب ا) و (ب ا ج)
ولکن (ب ج س) و (س ب د) دو قائمه میباشند
پس مجموع (د ب ا) و (ب ا ج) نیز دو قائمه میباشند
لذا خط مستقیمیکه بر الح

تفصیل
(۱) چونکه مجموع زاویتین (ب ج ا) و (ا ب د) مساوی دو قائمه اند لهذا هر یکی از زاویتین را
تکمله نامند گویند که
و اما هرگاه مجموع دو زاویه مساوی یک قائمه باشد هر یکی را مکمل قائم گویند
این حدود را بدین خود بسیار است
(۲) مثلاً زاویه منظم یعنی مثل زاویه حاده آن مقدار زاویه است که چون منضم بجاده
شود مجموع هر دو تشکیل نمایند یک قائمه را
مثلاً زاویتین (ب ج ا) و (ا ب د) هر دو مکمل یکدیگرند
(۳) مثلاً دو قائمه آن مقدار زاویه است که چون منضم شود بناوی معلومه مجموع
آن تشکیل دو قائم نمایند
مثلاً زاویتین (ب ج ا) و (ا ب د) تکمله یکدیگرند
خط مستقیمیکه بر خط مستقیم دیگر واقع شود دو زاویه در دو جانب خود تشکیل دهد
پس این زاویا را خطوطی که تنصیف میکنند تشکیل زاویه قائم خواهند نمود

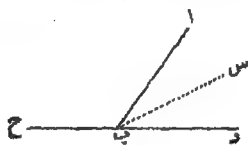


مثلاً خط مستقیم (ب ج) بر خط مستقیم (ا ب) واقع و در دو جانب خود دو زاویه
متصل تشکیل داده است
یعنی زاویه (ب ج ا) و (ا ب د)
این زاویه را خط (ب ج) تنصیف میکند
لذا از این دو خط خط (ب ج) را منصف داخلی و (ا ب د) را منصف خارجی گویند
پس هر یکی از زاویا منصف داخلی و خارجی بر قائمه متقاطع خواهند بود

شکل (۱۴) اشبالی

هرگاه دو خط مستقیم بر یک نقطه دو خط مستقیم دیگر

از سمت متقابل ممتد شده اتصال نمایند و در زاویه
دو قائمه تشکیل نمایند پس این دو خط مستقیم بعد از اتصال
بر يك خط مستقیم واقع خواهند شد یعنی هر دو در يك خط مستقیمند



فرض کن بر نقطه (ب) که طرف آنها خط مستقیم (اب) میباشد
دو خط مستقیم (بج) و (ب د) از دو سمت متقابل ممتد شده در نقطه (ب)
اتصال نموده زاویه بین (ابج) و (اب د) که مجموعه آنها دو قائمه میباشد
تشکیل داده اند

هذا (د ب) و (ب ج) در يك خط مستقیم واقع خواهند بود
ثبوت = زیرا که هرگاه (ب د) ص (ب ج) بزرگ خرد مستقیم نباشند
پس در صورت امکان

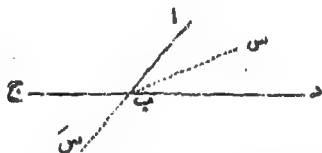
فرض کن (ب س) با (ب ج) اتصال نموده بزرگ خط مستقیم واقع شده است
در این صورت خط مستقیم (اب) با خط مستقیم (ج ب س) وصل میشود
لذا بر حکم (۱۳) زاویه متصله مساوی دو قائمه میباشد
یعنی (موجب مفروض) زاویه بین (س ب ا) و (اب د) با هم بمقادیر قائم اند
و حال آنکه زاویه بین (ابج) و (اب د) هم دو قائمه میباشد
بنابر این (بر حکم علم ۲) چون زاویه بین (ابج) و (اب س) متساویند با

زاوین (ب ج) و (ا ب د)

خارج کن از هر یکی از این متساویا زاویه مشترکه (ب ج) را
 پس (ب ج ک علم ۳) باقی زاویه (ا ب س) برابر است با باقی زاویه (ا ب د)
 یعنی زاویه کوچک مساوی شد با زاویه بزرگ و این ناممکن است
 لهذا (ب س) و (ب ج) در یک خط مستقیم واقع نباشند
 و نیز توان ثابت نمود که بغیر از خط مستقیم (ب د) هیچ خط مستقیمی بعد از
 اتصال با (ب ج) بر یک خط مستقیم واقع نخواهد بود
 بنابراین (ب د) است که بعد از اتصال با (ب ج) بر یک خط مستقیم
 واقع میشود

لذا هرگاه در خط مستقیم بر یک نقطه الخ

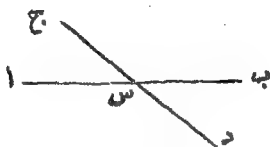
تفهیم
 (۱) این شکل عکس شکل سیزدهم است
 (۲) قید دوسمت متقابل در این شده است چه هرگاه این قید نباشد ممکن است که دو خط
 با خط مستقیم ثالث دوزاوی قائمه پیدا کنند و خود آن خطوط مدویده بعد از اتصال
 در یک خط مستقیم نباشند
 یعنی چنانکه خط (ب س) فوقانی کشیده شده است تحتانی هم توان کشید



مثلاً (ب س) (بین موقوفه) بعد از اتصال با نقطه (ب د) و قائم پیدا کرده است
 یعنی محصور (ب ج ک) و (ب ج ا) دو قائمه میباشند
 و حال آنکه (ب س) با (ب ج) در یک خط مستقیم نباشد

شکل (۱۵) اثباتی

هرگاه دو خط مستقیم متقاطع هم دیگر باشند
زوایای متقابل آن با هم متساوی خواهند بود



فرض کن (ا ب) و (ج د) دو خط مستقیم و یکدیگر را در نقطه (س) قطع کنند
لذا زاویه (ا س ج) مساوی زاویه (د س ب) و نیز زاویه (ج س ب) مساوی
زاویه (ا س د) خواهد بود.

ثبوت = چون خط مستقیم (ا س) بر خط مستقیم (ج د)
دو زاویه متضاد یعنی (ج س ا) و (د س ب) در نقطه (س) تشکیل میدهند لذا
بحکم (ش ۱۳) مجموع این دو زاویه مساوی دو قائمه میباشد
ایضا چونکه خط مستقیم (د س) بر خط مستقیم (ا ب) دو زاویه متضاد (س د ا) و (س د ب)
در نقطه (س) متشکل غوده او بحکم (ش ۱۳) مجموع این دو زاویه هم مساوی دو قائمه
میشود در فوق ثابت شد که مجموع زاویه (ج س ا) و (ا س د) مساوی دو قائمه میباشد
لذا مجموع زاویه (ج س ا) و (ا س د) مساوییت با دو زاویه
(ا س د) و (د س ب) است.

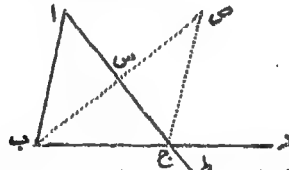
از هر یکی از این متساویات خارج کن زاویه مشترک (ا س د) را
پس (بحکم علم ۳) باقی زاویه (ج س ا) مساوییت با باقی زاویه (د س ب)
و بهین تفصیل ثابت میشود که (ج س ب) مساوییت با زاویه (ا س د)

لهذا هکاه دو خط مستقیم متقاطع الح

- تفہیم = از این منہ میشود
- (۱) آنکہ دو خط مستقیم کہ در یک نقطہ متقاطع یکدیگر باشند در آن نقطہ زاویای متشکله این دو خط مساوی چهار قائمہ میباشند
- (۲) همین طور ہر قدر خطوط مستقیم در یک نقطہ متقاطع یکدیگر باشند مجموعہ زاویا آنها مساوی چهار قائمہ میباشند
- مشق (۱) ہکاه در شکل مذکورہ زاویہ (اس د) را ص (س) تنصیف نماید و زاویہ (ب س ج) را (ط س) تنصیف کند ثابت کن
- (۲) کہ ص (س) و ط س د یک خط مستقیم واقع خواهند شد
- (۳) ہکاه در یک خط مستقیم (اب) نقطہ معین شود مثلاً (س) و از این نقطہ دو خط مستقیم (س ج) و (س د) باز دو سمت متقابل (اب) خارج شوند
- تہیکہ زاویہ (اس ج) مساوی (ب س د) باشد ثابت کن کہ ص (س ج) و (س د) در یک خط مستقیم ہند

شکل (۱۷) اثباتی

ہکاه ضلع مثلثی را امتداد سازند زاویہ خارجہ کہ از امتداد این ضلع پیدا شود را زاویہ داخلہ کہ مقابل واقع است و سہ خواہد بود یعنی بزرگ خواہد بود

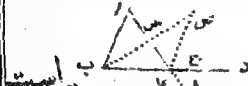


فرض کن (اب ج) مثلث و ضلع ان ب ج تا نقطہ (د) خارج شد

لهذا زاویہ خارجہ (ب ج د) نسبت بھر یکی از زاویای داخلہ (ب ج ا) و (ج ب د) خواہد بود کہ مقابل واقع شدہ اند

وضع شکل = (بجک ش ۱۰) (اج را بر نقطہ (س) تنصیف کن و وصل کن (ب س) را

و (بجمله شش) تا نقطه (ص) چنان خارج کن که (س ص) مساوی (س ب) باشد و صل کن (ص ج) را.



ثبوت = چونکه (اس) برابر (س ج) و (ب س) برابر (س ص) هر دو قائم شده لهذا ضلعین (اس) و (س ب) مساویند با ضلعین (ج س) و (س ص) موافق نظیر خود.

و (بجمله شش) زاویتین (اس ب) و (ج س ص) با هم متساویند زیرا که متقابلیه میباشند.

لذا (بجمله شش) مثلث (اس ب) برابر است با مثلث (ج س ص) و باقی زوایای یک مثلث متساویند با باقی زوایای مثلث دیگر مثلاً با نظائر خود.

یعنی زاویه (ب اس) برابر است با زاویه (س ج ص) و (س ب اس) با (س ص ج).

لکن (بجمله علم ۹) کل زاویه (س ج د) بزرگتر نسبت به زاویه (س ج ص) که جزو آن است.

لذا زاویه (ج د) اوسع باشد نسبت به زاویه (ب اس).

بهین تفصیل هرگاه ضلع (ب ج) تنصیف شود و ضلع (ا ج) را تا نقطه (ط) خارج کنیم

ثابت خواهد شد که زاویه (ب ج ط) بزرگتر نسبت به زاویه (ا ب ج) و (بجمله شش ۱) زاویه (ب ج ط) مساویت با زاویه (ج د)

بنابرین ثابت شد که زاویه (ا ج د) بزرگست نسبت به زاویه (ا ب ج).

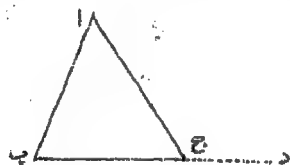
لذا هرگاه ضلع مثلث را ممتد سازند الح

مشق

- (۱) ثابت کن از یک نقطه تا محیط مستقیم زیادی از دو خط مستقیم نتوان خارج نمود.
- (۲) ثابت کن دو مثلث متساوی الساقین حاده میباشند.
- (۳) ثابت کن هرگاه یک زاویه مثلث قائمه باشد فرجه باشد باقی زوای آن حاده خواهند بود.
- (۴) ثابت کن از یک نقطه که خارج از خط مستقیم است زیاده از یک عمود نتوان بر خط مذکور قائم نمود.
- (۵) مثلثاتی که دو ضلع آن دو ضلع متشکل شده اند زوای خارج آنها را با یکدیگر زاویه داخله برابرند.
- (۶) سه مثلث با از قسمیکه در یکی از آنها زاویه خارج برابر باشد با زاویه داخله که متصل است و در دو سوی کوچک و در سوئی بزرگ باشد.
- (۷) ثابت کن هرگاه در شکل (۱۶) (ا ص) و (ص و د) شود پس (ا ص) را راست با (ب ج) وسطی مثلث (ا ب ج) را راست با سطح مثلث (ا ج ص).
- (۸) موافق یونانی فوق بر یک قاعده قائم کن سلسله مثلثات را قسمیکه سطوح آنها با هم متساوی و رؤس آنها متساوی الابعاد باشند از حیث ارتفاع.
- (۹) زاویه رأس مثلث متساوی الساقین گاه حاده میباشد و گاه منفرجه و گاه قائمه.

شکل (۱۷) اثباتی

مجموعه زاوئین هر مثلث از دو قائمه کمتر میباشد



فرض کن (ا ب ج) مثلث است و منجمده زوایا ثلاثه آن

مجموعه زاوئین کمتر از دو قائمه خواهد بود یعنی مجموعه (ا ب ج) و (ا ج ب)

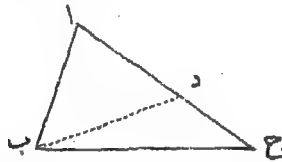
کمتر است نسبت به دو قائمه.

وضع شکل = خارج کن (ب ج) را تا نقطه (د)

(۱) در مثلث منفرج الزاویه عمودیکه از زاویه حاده بر ضلع مقابل کشیده شود از مثلث بیرونی واقع خواهد شد

شکل (۱۸) اثباتی

هرگاه یک ضلع مثلثی طولانیتر باشد نسبت به ضلع دیگر پس زاویه که مقابل آن ضلع است اعظم خواهد بود نسبت به زاویه که مقابل ضلع اقصر است



فرض کن (ا ب ج) مثلث و ضلع (ا ب ج) طول است نسبت به ضلع (ا ب)

لهذا زاویه (ا ب ج) اعظم خواهد بود نسبت به زاویه (ا ب ج)

وضع شکل = (بجک ش ۳) در ضلع (ا ب ج) که طول است معین کن مقدار

(ا د) را بمساوی (ا ب)

وصل کن (ب د) را

ثبوت = چونکه زاویه (ا د ب) زاویه خارج مثلث (ب ج د) میباشد

لهذا (بجک ش ۱۶) اعظم است نسبت به زاویه (د ج ب)

ولکن (بجک ش ۵) زاویه (ا د ب) برابر است با زاویه (ا ب د)

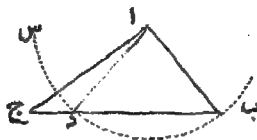
بدلیل اینکه ضلع (ا د) بمساوی (ا ب) منقسم شده است

بنابراین زاویه (ا ب د) بزرگتر از زاویه (ا ج ب)

پس (بجک علم ۹) زاویه (ا ب ج) بزرگتر از زاویه (ا ج ب)

لهذا هرگاه یک ضلع مثلثی الح

تقریباً = بعضی از مهندسان دعوی می‌کنند که این قیاس ثابت کنند



مثلاً از مرکز 'ا' و نیم قطر 'اب' رسم کن دایره 'ب د س' را
 فاصله 'ب ج' را بر نقطه 'د' قطع نماید
 وصل کن 'ا د' را
 چونکه 'اب' مساوی 'اد' است لهذا زاویه 'ا د ب' برابر است با زاویه 'ا ب د' هر
 و لکن زاویه 'ا ب ج' از زاویه 'ا ب د' اعظم است از زاویه 'ا ج ب' هر
 لهذا زاویه 'ا ب ج' از زاویه 'ا ج ب' اعظم است از زاویه 'ا ج ب' هر

شکل (۱۹) اثباتی

در هر مثلث مقابل زاویه بزرگ ضلع بزرگ واقع میشود



فرض کن 'اب ج' مثلثی است و زاویه 'ان اب ج' اعظم است از زاویه 'ا ج ب'
 لهذا ضلع 'ا ج' اطول خواهد بود نسبت به ضلع 'اب' هر
 ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه 'ا ج' اطول نباشد باید که مساوی
 (اب) یا اینکه اقصر از (اب) باشد
 در صورتیکه (ا ج) مساوی (اب) باشد هر
 پس (ب ج کمرش) می باید زاویه 'ا ب ج' برابر باشد با زاویه 'ا ج ب' هر
 لکن مفروض چنین نیست هر

بنا بر این ثابت شد که راجح بمساوی است یا نباشد -
 و اما در صورتیکه راجح اقصر باشد نسبت با راجح -
 پس (بجای ش ۱۸) میباید زاویه راجح کوچک باشد نسبت به زاویه راجح -
 و لکن مفروض نه اینست -
 لهذا معلوم شد که راجح اقصر هم نیست از راجح -
 پس ثابت شد که راجح اطول است نسبت با راجح -
 لهذا در هر مثلثی مقابل زاویه الح
 مشق - هر این شکل عکس شکل ۸ میباید -

- (۱) و در مثلث قائم الزاویه اطول است نسبت به ضلع آن -
- (۲) در مثلث منفرجه الزاویه مقابل زاویه منفرجه اطول است نسبت به ضلع آن -
- (۳) و در مثلث و وتر مربع اطول است نسبت به ضلع آن -
- (۴) هرگاه یک ضلع مربع ممتد شود و در آن نقطه معین شود و از رأس زاویه مقابل خطی تا آن نقطه خارج شود آن خط از وتر مربع اطول خواهد بود -
- (۵) از یک نقطه نتوان تا بخط مستقیم سه خط مستقیم خارج نمود -
- (۶) از رأس مثلث مستساوی الساقین آنجا که نقطه در قاعده هرگاه خطی کشید شود از یک ساق آن اقصر خواهد بود مگر آن نقطه هرگاه در قاعده ممدود باشد خط مذکور اطول خواهد بود -
- (۷) اگر راجح مثلثی باشد که در آن ضلع اب نسبت به راجح طول نباشد و بر یک نقطه از راجح مثلثی (خطی) کشیده شود پس آن خط نسبت به راجح اقصر خواهد بود -
- (۸) هرگاه از زاویه رأس مثلثی صعود بر قاعده خارج شود و مثلث را در دو قسمت غیر متساوی تقسیم نماید قسمت بزرگتر آن متصل به ضلع اطول خواهد بود -

شکل (۲۰) اثباتی

بجمله ضلعین از اضلاع ثلثه مثلثی زیاده است نسبت به ضلع سومی





فرض کن (ا ب ج) مثلثی است و مجموع ضلعین آن اطول است نسبت به ضلع
یعنی مجموع (ب ا) و (ا ج) زیاده است نسبت با (ب ج)
و نیز مجموع (ا ب) و (ب ج) زیاده از (ا ج)
و مجموع (ب ج) و (ج ا) زیاده از (ا ب)
وضع شکل = (ب ج ک ش ۳) ب ا د تا بنقطه (د) چنان خارج کن
که (ا د) بمساوی (ا ج) باشد
وصل کن (د ج) د

ثبوت = چونکه (ا د) بمساوی (ا ج) مرقسم شده است
لهذا (ب ج ک ش ۵) زاویه (ا د ج) بمساوی زاویه (ا ج د) میباشد
ولکن (ب ج ک ش ۹) زاویه (ب ج د) اعظم است نسبت بر زاویه (ا ج د) که هر دو آن
بنابرین زاویه (ب ج د) بزرگتر از زاویه (ب د ج)
و چونکه در مثلث (د ب ج) زاویه (ب ج د) بزرگتر نسبت بر زاویه (ب د ج)
و نیز (ب ج ک ش ۱۹) مقابل زاویه بزرگ ضلع بزرگ واقع میشود
لهذا ضلع (ب د) اطول است از ضلع (ب ج)
ولکن (ب د) بمساوی ضلعین (ب ا) و (ا ج) است
از این جهت مجموع (ب ا) و (ا ج) زیاده است از (ب ج)

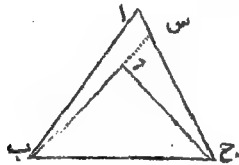
و به همین تفصیل ثابت توان نمود که مجموع (اب) و (بج) اطول است از (اج)
و كذلك مجموع ضلعین (بج) و (ج ا) اطول نسبت با (اب)
لهذا مجموع ضلعین از اضلاع الم

مشق

- (۱) در شکل هفتم مجموع (اد) و (بج) اطول است نسبت با (اج) و (ب د)
- (۲) در این قطر اطول است نسبت به خط مستقیم که در دایره واقع شود و قطر نباشد
- (۳) مجموع سه ضلع هر شکل ذواریعه الاضلاع نسبت به ضلع چهارم اطول است
- (۴) نصف مجموع اضلاع مثلث نسبت به ضلع آن اطول و نسبت به ضلعین آن اقصر است
- (۵) در شکل ذواریعه الاضلاع مجموع دو قطر اطول است نسبت به دو ضلع مقابل آن
- (۶) و مجموع اضلاع آن اطول نسبت به وتر آن و اقصر است نسبت به دو ضلع مجاور وتر
- (۷) در شکل ذواریعه الاضلاع مجموع دو قطر اقصر است نسبت به مجموع خطوط اریعه که از یک نقطه تا زوایای آن خارج شود (نقطه تقاطع وتر مستقیم است)

شکل (۲۱) اثباتی

هرگاه از نقاطین ضلعی این مثلث و خط مستقیم ممتد شوند تا بنقطه
در آن مثلث واقع باشد پس مجموع آن و خط ممتد نسبت ایجاد و ضلع
مثلث کمتر خواهد بود



فرض کن (ابج) مثلثی است از نقاطین ضلع (بج)
یعنی از نقطه (ب) و (ج) دو خط مستقیم (ب د) و (ج د) الى نقطه (د)
که در مثلث واقع شده است ممتد شده اند
پس مجموع (ب د) و (ج د) نسبت مجموع ضلعین (ب ا) و (ا ج) کمتر خواهد بود



ولكن زاویه وسطی یعنی (ب د ج) بزرگ خواهد بود نسبت برآویه (ب ا ج)
 وضع شکل = خارج کن (ب د) را که در نقطه س با (ا ج) وصل شود
 ثبوت = چونکه (ب ج کمرش ۲) مجموع ضلعین هر مثلث اطولست
 نسبت بضلع سوم

لهذا مجموع ضلعین (ب ا) و (ا س) مر مثلث (ب ا س) اطول است
 نسبت با (ب س) —

بیفزای بر هر یکی از این غیر متساویین (س ج) را
 پس (ب ج کمر علم ۴) مجموع (ب ا) و (ا ج) اطولست نسبت مجموع (ب ا س)
 و (س ج) —

و (ب ج کمرش ۲) مجموع ضلعین (ج س) و (س د) اطولست نسبت بضلع سوم
 (ج د)

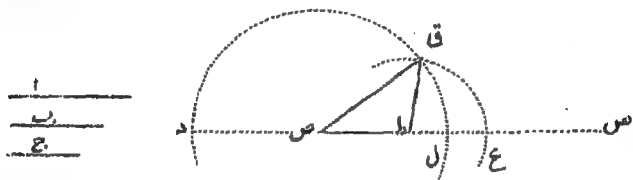
بیفزای بر هر یکی از این غیر متساویین (ب د) را
 پس (ب ج کمر علم ۴) مجموع ضلعین (ج س) و (س ب) اطولست نسبت مجموع
 (ج د) و (د ب)

لهذا هرگاه از نقاط طرفین الم
 مشق

- (۱) مجموع خطوطی که از زوایای مثلث تا هر نقطه که در آن واقع هست خارج شده باشند
 اطولست نسبت بنصف مجموع اضلاع آن
 (۲) در شکل (۱۶) زاویه (ب ص ج) کمتر است از زاویه (ا ب ج) پس هرگاه تغییر داده شود هیئت شکل در چه صورتی زاویه مذکوره مساوی
 نصف زاویه (ا ب ج) خواهد شد

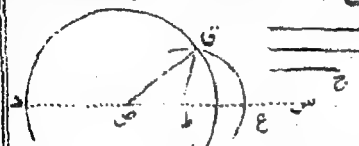
شکل (۲۲) علی

مثالی باشد که اضلاع ثلاثه آن مساوی باشند با سه خط مستقیم
 مفروض و مجموع دو خط از آن سه خط زیاده باشد نسبت بمجموع



فرض کن (ا، ب و ج) سه خط مستقیم مفروض که مجموع دو خط
 آن اطول است نسبت بمجموع سوم
 یعنی مجموع (ا، ب و ج) اطول است از (ج)
 و مجموع (ا، ب و ج) اطول از (ب) و نیز (ب و ج) اطول از (ا)
 مطلوب اینست مثالی مرتب شود که اضلاع ثلاثه آن برابر باشند
 با سه خط مفروض (ا، ب و ج) موافق نظیر خود
 وضع شکل = خارج کن خط مستقیم (د س) را که طرف نقطه (د)
 منتهی باشد و اکبر بطرف (س) غیر منتهی
 (بجای ش ۳) معین کن (د ص) را برابر (ا)
 و (ص ط) را برابر (ب) و (ط ع) را مساوی (ج)

و (بجمله اصول ۳) از مرکز (ص) بفاصله (ص د) بسازد دایره (د ق ل) را
و از مرکز (ط) بفاصله (ط ع) بسازد دایره (ع ق) را که دایره اول را بر نقطه (ق)
قطع نماید.



و وصل کن (ق ص) و (ق ط) را. —
لذا (ق ص ط) مثلث مطلوب مرتسم خواهد شد.

که اضلاع ثلاثه آن مساوی خواهند بود با خطوط معلوم (ا و ب) و (ج و ح).

ثبوت = چونکه (ص) مرکز دایره (د ق ل) است

لذا (بجمله حد ۱۵) (ص د) مساویست با (ص ق)

لکن (ص د) مساوی (ا) معین شده است

پس (بجمله علم ۱) (ص ق) مساوی (ا) میباشد.

و چونکه (ط) مرکز دایره (ع ق) است

لذا (بجمله حد ۱۵) (ط ع) مساویست با (ط ق)

لکن (ط ع) مساوی (ج) است

لذا (بجمله علم ۱) (ط ق) مساوی (ج) میباشد.

و اما (ص ط) برابر (ب) خارج شده است

بنابراین خطوط مستقیمه (ق ص) و (ص ط) و (ط ق) مساویند با خطوط

(ا و ب و ج)

لذا مثلث (ق ص ط) که اضلاع آن متساویند با خطوط ثلاثه

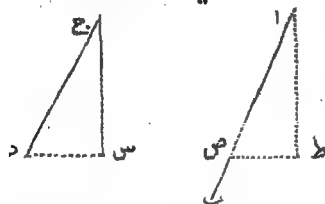
مفروضه متوافق با نظائر خود مرتسم گردید و مراد همین بوده —

تذکره = در این نحو مذکور شده است که مجموع دو خط اطول باشد نسبت به خط ثالث هرگاه این شرط نباشد یعنی مجموع دو خط بمساوی خط سوم یا کمتر از آن باشد تشکیل مثلث مطلوب بر در هر دو صورت غیر ممکن است - اندکی قائل و حل کن این عقده را

- مشق**
- (۱) ثابت کن هرگاه مجموع دو خط کمتر از خط سوم باشد تقاطع دایره و این واقع نخواهد شد
 - (۲) ثابت کن هرگاه پاره ای عمل مماس در اولین واقع شود مجموع دو خط را با خط سوم منتهی خواهد بود
 - (۳) ثابت کن آیا ممکن است موافق شرایطی که در نحو مذکور است افتاد یک از مثلثات متشکل گردد
 - (۴) هرگاه (ا و ب) و (ج) با هم مساوی باشند بقاچه نوع از مثلث تشکیل یابد

شکل (۲۳) علی

در خط مستقیم مفروض بزرگ نقطه بسیار زاویه مستقیمه الخطین
که مسا باشد باز زاویه مستقیمه الخطین مفروض



فرض کن (ا ب) خط مستقیم مفروض و (ا) نقطه مفروضه و (ج س)

زاویه مستقیمه الخطین معلوم است

مطلوب اینست که بر نقطه (ا) که در خط مستقیم (ا ب) می باشد زاویه

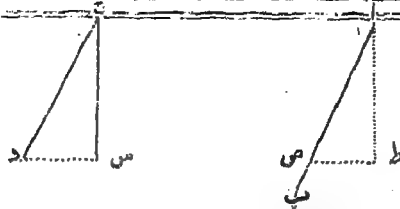
متشکل شود و مسا باشد باز زاویه مستقیمه الخطین معلوم یعنی (ج س)

وضع شکل = در خطین (ج د) و (ج س) معین کن نقطه (د) و نقطه

(س) را

وصل کن (د س) را

و بجز (ج د) بسیار مثلث (ا ص ط) را



قسمیکه اضلاع آن متسا باشند با خطوط تلاثة ج د و د س و (س ج)
 بطریقیکه اص بمسا ج د و ص ط بمسا و د س و (ط ا) بمسا (س ج) باشد
 لهذا زاویه (ص ط ا) برابر زاویه (د ج س) خواهد بود
 ثبوت = بدلیل اینکه ضلعین (ص ا) و (ط ا) برابرند با ضلعین (ج د)
 و (ج س) موافق نظیر خود
 وقاعدۀ (ط ص) بمسا و قاعدۀ (د س) مرتسم
 پس (بحکم ش ۸) زاویه ص ط ا مساویت با زاویه (د ج س)
 لهذا بر نقطه معلومه (ا) کرد در خط (ا ب) واقع شده است زاویه
 (ص ط ا) بمسا و زاویه مستقیمه الخطین معلومه یعنی (د ج س)
 مرتقم گردید - و هو المراد -

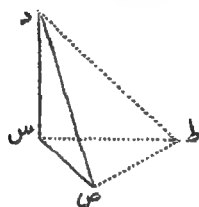
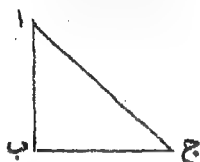
مشق

- (۱) مثلثی بسیار که دو ضلع مع یک زاویه آن معلوم باشد -
- (۲) مثلثی بسیار که قاعدۀ آن مساوی باشد با قاعدۀ مثلث معلوم و لکن زاویه رأس آن
 بزرگ باشد نسبت زاویه رأس مثلث معلوم -
- (۳) مثلثی بسیار که قاعدۀ آن مساوی باشد با قاعدۀ مثلث معلوم و لکن زاویه رأس آن کوچک
 و مجموعۀ ضلعین آن اقصر باشد نسبت زاویه رأس مجموعۀ ضلعین مثلث معلوم

شکل (۲۴) اثباتی

هرگاه در دو مثلث ضلعین یک مثلث مساوی باشند با
 ضلعین مثلث دیگر و یک زاویه آن در مثلث مساوی و زاویه دیگر معلوم باشد

نسبت زوایای وسطی ضلعین معلوم مثلاً یک بر یک و نیز مثلاً که اعظم
باشد قاعدۀ آن نسبت بقاعدۀ مثلاً دیگر اطول خواهد بود



فرض کن ا ب ج و د س ص دو مثلث

وضلعین آن (ا ب) و (ا ج) برابرند با ضلعین (د س) و (د ص) هر یک موافق ^{بناظر بر}

یعنی (ا ب) برابر (د س) و (ا ج) برابر (د ص)

لکن زوایای (ا ب ج) اعظم از زوایای (د س ص) میباشد

لهذا قاعدۀ (ب ج) اطول است از قاعدۀ (س ص)

فرض کن در ضلعین (د س) و (د ص) ضلع (د س) نسبت با (د ص)

اطول نباشد

وضع شکل = (بجک ش ۲۳) بر نقطۀ (د) که از خط (د س) است

بنای زوایای (س د ط) را

که برابر باشد با زوایای (ب ا ج)

و (بجک ش ۲) خارج کن (د ط) را بمساوی (ا ج) یا (د ص)

وصل کن (س ط) و (ط ص) را

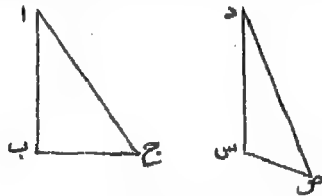
ثبوت = بنابراین (ب موجب فرض) (د س) بمساوی (ا ب) و نیز

(د ط) بمساوی (ا ج) هر قسم شده است

چهار دایره مرئی بر شاه حال است
 لهذا در مثلثین (س د ط) و (س د ص) زاویه (س د ط) اعظم از زاویه (س د ص) است
 لهذا قاعده (س ط) اطول است نسبت بقاعده (س ص)
 در این صورت نقطه (ص) فوق (س ط) واقع شده است
 و اما در مثلثین (س د ع) و (س د ط) زاویه (س د ع) اعظم است از زاویه (س د ط)
 لهذا قاعده (س ع) اطول است نسبت بقاعده (س ط)
 در این صورت نقطه (ط) که جای (ص) را گرفته است روی خط واقع شده است
 و اما در مثلثین (س د ق) و (س د ع) خود قیاس کن
 لهذا هرگاه در دو مثلث ضلعین یک مثلث الح

شکل (۲۵) اثباتی

هرگاه در دو مثلث ضلعین یک مثلث متساوی باشند با ضلعین
 مثلث دیگر موافق نظیر خود قاعده یک مثلث اطول باشد نسبت
 بقاعده مثلث دیگر پس زاویه وسطی ضلعین مثلث دیگر قاعده اش
 اطول است اعظم خواهد بود نسبت به ضلعین مثلث دیگر که قاعده اش اقصر



فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلثند

و ضلعین یک مثلث (ا ب) و (ا ج) متساویند با ضلعین (د س) و (د ص)
 متوافق با نظائر خود

یعنی (ا ب) برابر است با (د س) و (ا ج) با (د ص)

لکن قاعده (ب ج) اطول است از قاعده (س ص)

لذا زاویه (ب ا ج) اعظم است از زاویه (س د ص)

ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه زاویه β اج بزرگتر باشد از زاویه γ پس δ
 لازم می آید که مستطیل باشد یا اینکه کوچک باشد نسبت به زاویه γ پس δ ص
 لکن زاویه β اج مستطیلست باز زاویه γ پس δ ص



زیرا که هرگاه چنین باشد

پس (بحکم ۲۴) میباید قاعده β ج مساوی باشد با قاعده γ پس δ ص
 و حال آنکه (بموجب مفروض) چنین نیست -



و كذلك کوچک هم نیست چه هرگاه کوچک باشد

پس (بحکم ۲۴) می باید قاعده β ج اقصر باشد از قاعده γ پس δ ص
 و لکن (بموجب مفروض) چنین است -

یعنی زاویه β اج کوچک نباشد نسبت به زاویه γ پس δ ص
 و در فوق ثابت شد که زاویه β اج مستطیل نیست باز زاویه γ پس δ ص

پس زاویه β اج اعظم است از زاویه γ پس δ ص -

لهذا هرگاه در مثلث ضلعین α β

تفہیم = نسبت شکل (۲۴) باشکل (۲۵) هانت که شکل پنجم و ششم با هم -

مشق

(۱) هرگاه از رأس مثلث α β ج تا نقطه وسط قاعده β ج خط α γ کشیده شود

ثابت کن که مثلث شکل شدن زاویه α γ ج (طوب) منفرجه یا حاده موقوف است با طول

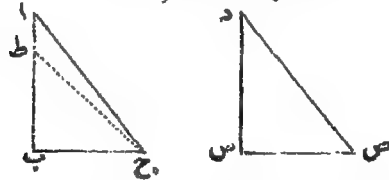
یا اقصر بودن α β ج نسبت به α γ ج -

(۲) در مثلث α β ج و در مثلث α γ ج هرگاه α β ج بمثل α γ ج باشد و لکن (وتر)

α γ ج اطول باشد نسبت به α β ج (طوب) ثابت کن که زاویه α β ج کوچک است نسبت به زاویه α γ ج و زاویه α γ ج اعظم است نسبت به زاویه α β ج (طوب)

شکل (۲۶) اثباتی

هرگاه در دو مثلث زاوین یک مثلث مساو باشند بازوین
 مثلث دیگر موافق نظیر خود و یک ضلع یک مثلث مساو باشد
 بایک ضلع مثلث دیگر زاین ضلعین متساو متصل باشند بازوین
 متساو خواه مقابل در هر دو صورت باقی ضلعین هر مثلث علی التناظر
 متساو خواهند بود و زاویه سوم از یک مثلث مساو خواهد بود بازو
 سوم از مثلث دیگر



فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث معلومند و زاوین هر یکی
 موافق نظیر خود متساوینند
 یعنی زاویه (ا ب ج) برابر است با زاویه (د س ص) و زاویه (ب ج ا) برابر است
 با زاویه (س ص د)
 و یک ضلع مثلث هم مساویت بایک ضلع مثلث دیگر
 (اول) چنین فرض نما که این دو ضلع متساو از دو مثلث متصلند
 بزوایای متساوین

یعنی ضلع (ب ج) مساویت با ضلع (س ص)
 لهذا باقی ضلعین هر مثلث علی التناظر با هم متساوی خواهند بود
 یعنی (ا ب) برابر با (د س) و (ا ج) برابر با (د ص)

و زاویه سوم یعنی (ب ج) مساوی خواهد بود با زاویه (د ص) در صورتیکه (ا ب) برابر (د س) نباشد پس میباید یکی از اینها از دیگری اطول باشد. هرگاه ممکن است تصور نما که (ا ب) اطولست نسبت با (د س) وضع شکل = (بحکم ش ۳) قطع کن (ب ط) را همسا (د س) وصل کن (ج ط)

ثبوت = پس در مثلثین (ط ب ج) و (د س ص) ضلع (ط ب) مساوی (د س) خارج شده است.

و (موجب مفروض) (ب ج) مساوی (د س) است

لذا ضلعین (ط ب) و (ب ج) مساویند با ضلعین (د س) و (د س) موافق نظیر خود



و زاویه (ط ب ج) مساوی با زاویه (د س ص)

لذا (بحکم ش ۴) مثلثین (ط ب ج) و (د س ص) باهم متساویند و زوایا که مقابل اضلاع متساویر واقعند هر یکی با نظیر خود متساوی

در این صورت زاویه (ط ب ج) برابر شد با زاویه (د س ص)

لکن (موجب مفروض) زاویه (د س ص) مساوی است با زاویه (ا ب ج)

پس (بحکم علم ۱) (ط ب ج) هم مساوی شد با زاویه (ا ب ج)

یعنی زاویه کوچک مساوی زاویه بزرگ

و این اثبات غیر ممکن است که جزو جمعاوی کل باشد.

هنا ثابت شد که (اب) و (دس) غیر متساوی نباشند.

یعنی با هم متساویند.

و (موجب مفروض) (بج) بمساوی (س ص) است.

هنا ضلعین (اب) و (بج) مساویند با ضلعین (دس) و (س ص)

موافق نظیر خود.

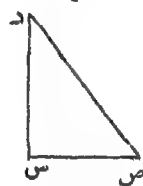
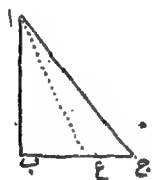
ایضا (موجب مفروض) زاویه (ابج) مساویت با زاویه (دس ص)

هنا (بج که شعاع) قاعدۀ (اج) برابر است با قاعدۀ (د ص)

و زاویه سوم یعنی (بج) مساویت با زاویه (س د ص)

(در هر) چنین فرض نما که این دو ضلع متساوی از دو مثلث مختلف

بازوایای متساوی



یعنی (اب) مساویت با (دس)

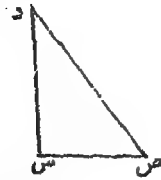
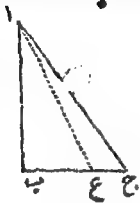
در این صورت هم باقی ضلعین هر مثلث علی التناظر با هم متساوی خواهند بود

یعنی (اج) بمساوی (د ص) و (بج) بمساوی (س ص)

و زاویه سوم یعنی (بج) برابر زاویه (س د ص) خواهد بود.

در صورتیکه (بج) بمساوی (س ص) نباشد عی باید یکی از اینها

احول باشد نسبت بدیگری.



تصوّر نما (بج) اطولست از (س ص) «

وضع شکل = (بج کم ش س) (بج) را بمساوی (س ص) قطع کن
وصل کن (اع) را «

ثبوت = در مثلثین (ابج) و (د س ص) چونکه (بج) بمساوی

(س ص) مرتسم شده است

لهذا ضلعین (اب) و (بج) مساویند با ضلعین (د س) و (س ص)
موافق نظیر خود «

و زاویه (ابج) برابر است با زاویه (د س ص)

لهذا (بج کم ش س) مثلث (ابج) برابر است با مثلث (د س ص)
لا بد مقابل اضلاع متساویه زوایا با هم ملنا ویند هر یکی موافق نظیر خود
بنابرین زاویه (بج) مساویت با زاویه (س ص د) «

لکن (بج کم ش س) فرض (زاویه (س ص د) مساویت با زاویه (بج ا))

پس (بج کم ش ا) برابر است با زاویه (بج ا) «

یعنی در مثلث (اع ج) زاویه خارجی (بج) مساوی باشد با زاویه داخلی
(بج ا) که در مقابل واقع شده است «

ولکن (بج کم ش ا) اثبات این قصور غیر ممکن است «

از این جهت ثابت شد که (ب ج) و (س ص) غیر متساوی نباشند) -
یعنی با هم متساویند) -

و (موجب مفروض) (اب) مساویست با (د س) -
لذا ضلعین (اب) و (ب ج) برابرند با ضلعین (د س) و (س ص)
موافق نظیر خود) -

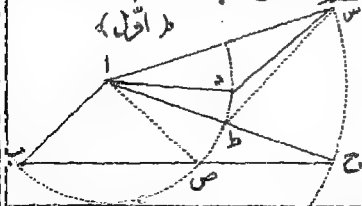
ایضا (موجب مفروض) زاویه وسطی (اب ج) مساویست با زاویه
وسطی (د س ص)

پس (بجک ش س) قاعده (ا ج) برابر است با قاعده (د ص) -
و زاویه سوم یعنی (ب ا ج) مساویست با زاویه سوم (س د ص)
لذا هرگاه در دو مثلث زاویه و ضلع واقع شود

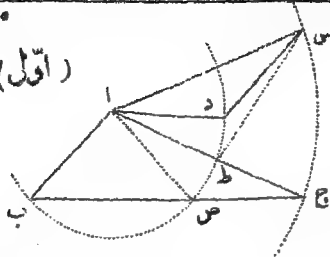
تفهیم = در اقلیدس از شکل اول تا شکل ۲۶ فصلی است علی هذا
و در این فصل بنام عظیمه را در شکل ۲۷ و ۲۸ بیان کرده است
مختص آن اینست که هرگاه سه جزء یک مثلث (به ترتیب که در مباحث آن اشکال
مذکور است) مساوی باشند با سه جزء و مثلث دیگر متوافق باشد نظر بر خود
پس هر دو مثلث با هم متساوی خواهند بود) -
یعنی بر یکدیگر منطبق خواهند شد) -

و مراد از جزء و مثلث زاویه است یا ضلع آن -
اما هرگاه رعایت ترتیب ملحوظ نباشد ممکن است سه زاویه مختلفی علی التناظر مساوی
باشند با سه زاویه دیگر و حال آنکه سطوح آنها با هم متساوی نباشند چنانکه بعد از
این در محل خود مذکور شود) -

و نیز ممکن است دو ضلع و یک زاویه مختلفی علی التناظر مساوی باشند با دو ضلع و یک
زاویه مختلف دیگر و هر دو مثلث با هم متساوی نباشند) -
یعنی منطبق نشوند و اینچنین از این شکل توان دریافت

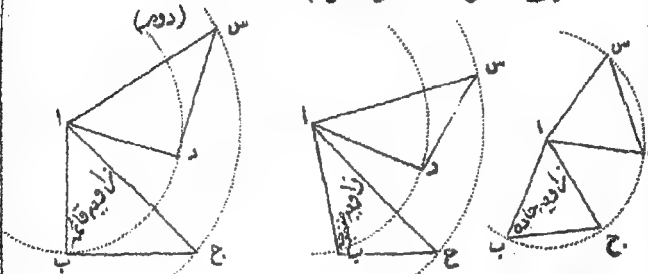


(اول)



مثلاً در دو مثلث (ابج) و (ااس) ضلع (اب) یا (اص) منقوط مساویت
 با ضلع (اد) و ضلع (اج) مساویت با ضلع (اس)
 و زاویه (اجب) در صورتیکه فرض شود قاعده (اس) مساویت با قاعده (جص) بمساوی
 زاویه (ااس) است
 یعنی میجوئد يك مثلث مساویند با سحر و مثلث دیگر موافق بنظر خود
 معزك مثلثین با هم متساوی نباشند
 و لكن در بعضی حالات انطباق اشكال واقع شود
 پس در آن گران برای بصیرت مستدیان السبب میفماید
 و از این اشكال استفاده توان نمود

(دوم)

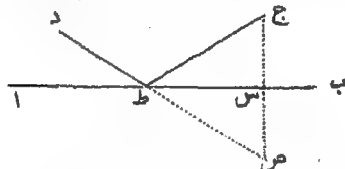


هرگاه د و ضلع و يك زاویه مثلث مساوی باشد با د و ضلع و يك زاویه مثلث دیگر
 موافق بنظر خود
 و این زاویه قائمه باشد منفرجه باشد یا حاده در هر سه صورت مثلثین با هم متساوی
 مثلاً هرگاه ضلعین (اب) و (اج) مساوی باشند با ضلعین (اد) و (اس) موافق بنظر خود
 و زاویه (اجب) مساوی باشد با زاویه (ااس)
 پس هر دو مثلث با هم متساوی خواهند بود
 یعنی منطبق خواهند شد
 استنباط این اشكال بخوبی است بود زیرا که در مبتدیان
 و لكن این دو مطلب را با هم نمیافهمد باید سیرد
 (اقل) هرگاه ضلعین يك مثلث مثلثی با ضلعین يك مثلث دیگر
 و زاویه مثلث این زوجین نیز با هم متساوی باشند

پس ضلع سوم و باقی زوایای هر دو مثلث با هم متساوی خواهند بود.
یعنی مطابق واقع شود (این مطلب عکس شکل ۲۶ می باشد)
(دو) هرگاه ضلعین یک مثلث علی التماثل مساوی باشند با ضلعین مثلث دیگر
ولکن زوایای متشکله زوجین مذکور با هم متساوی نباشند
پس ضلع سوم و (در یک حالتی) باقی زوایای هر دو مثلث با هم غیر متساوی خواهند بود
یعنی مطابق واقع نخواهد شد.
مراد از حالت یقینست که هر شش زوایه مثلثین با هم متساوی باشند.
بین دو شکل اول مثلثین (اسط) و (اج ب)

مشق

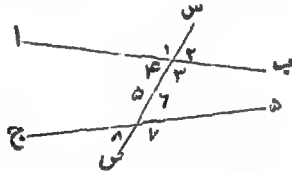
- (۱) در مثلث مساوی الساقین (اج ب ج) هرگاه زاویتهای قائمه (ب ج) را خطوط (ب د) و (ج س) تنصیف نموده با اضلاع مقابل در نقطه (د) و (س) موصول شوند.
ثابت کن مثلث (س ج ب) با هم متساویند
از طریق قائم مثلث مساوی الساقین عماد یک بر ضلعین مقابل خارج شوند با هم متساوی خواهند بود.
- (۲) خطی که تنصیف کند زاویه و فاصله هر نقطه آن با اضلاع طرفین متساوی خواهد بود.
- (۳) دو خط (اب) از نقطه وسط (ج) خط مستقیم خارج شده است
و از نقطه (ا) و (ب) عماد (ام) و (ب س) بر آن قائم میباشند
ثابت کن (ام) مساوی (ب س) است.
- (۴) در یک جانب خط مستقیم از دو نقاط معلوم دو خط مستقیم چنان خارج کن که هر خط مستقیم معلوم با هم اتصال نموده تشکیل زوایای متساوی نمایند.



- فرض کن (اب) خط مستقیم معلوم (ج) و (د) نقاط معلوم
مقصود اینست که از نقاط مذکوره دو خط مستقیم قوسی خارج شوند که متقابلان ثابت با
(اب) مثل هم باشد.
وضع شکل = قایم کن بر (اب) عمود (ج س) را خارج ساز از آن نقطه (ص)
قسمت کن (ص س) مساوی (ج س) باشد.
وصل کن (د ص) را که بر نقطه (ط) با هم موصول شوند.
انضا وصل کن (ج ط) را.
پس (ج ط) و (ط د) خطوط مطلوبه خواهند بود.
(ثابت کن بدلیل)
(۶) در یک خط مستقیم معلوم نقطه معین کن که فاصله آن متساوی باشد با دو خط معلوم
بیان کن در هر صورتی این دعوی غیر ممکن خواهد بود.

(۷) از نقطه معلوم خط مستقیم خارج کن که چون از دو نقطه مفروضه بر آن دو عمود قائم شود با هم متساوی باشند پس ظاهر کن در چه صورتی این دعوی ممکن نباشد.

حد = خطوط مستقیم متوازی که از دو نقطه خود هر قدر امتداد شوند با هم اتصال و تقاطع ننمایند



تعریف = چون دو خط مستقیم (ا ب) و (ج د) را خط مستقیم دیگر مثلاً (س ص) قطع کند

و از آن تقاطع زوایا حادث شوند هر یکی از آن زوایا را جهت امتیاز با نامی خاص موسوم سازند.

مثلاً آ - ۱ - ۲ - ۳ را زوایای خارجیه گویند.

و ۴ - ۵ - ۶ - ۷ را زوایای داخله خوانند.

ایضاً هر یکی از ۴ - ۵ و ۶ - ۷ را زاویه متبادله گویند.

و امّا در یک سمت (س ص) زاویه (۲) را خارجیه و (۶) را نسبت

بان زاویه داخله مقابل گویند.

و گاهی ۱ و ۲ و نیز ۳ و ۴ را منظر گویند

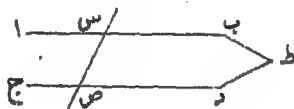
پس (بجمله علم ۱۲) هرگاه مجموعه زاویاتین (۳) و (۵) نسبت بدو

قائم که تر باشد

قطعاً (اب) و (ج د) بعد از امتداد بی هم در يك نقطه با هم وصل
خواهند شد.

شكل (٢١) اثباتی

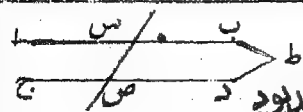
هرگاه برد و خط مستقیم خط مستقیم دیگر واقع شود و زوایا
متباله و متساوی تشکیل نمایند پس آن دو خط مستقیم با هم متساوی خواهند



فرض کن (اب) و (ج د) را که دو خط مستقیم اند
خط مستقیم (س ص) در نقطه (س) و (ص) قطع نموده زوایا متباله (س)
و (س ص د) را با هم متساوی تشکیل داده است.
لذا (اب) متوازی (ج د) خواهد بود.

ثبوت = زیرا که هرگاه (اب) متوازی (ج د) نباشد لابد در يك
نقطه پس از امتداد بی هم با هم وصل خواهند شد.
یعنی بسامت (ب) و (د) یا بسامت (ا) و (ج) اتصال پیدا کنند.
هرگاه ممکن است تصور نمائیم که (اب) و (ج د) پس از امتداد متوازی
بطرف (ب) و (د) در نقطه (ط) موصول شده اند.
در این صورت (ط س ص) مثلثی می باشد.

پس (بجک ش ١٦) زاویه خارجی یعنی (س ص) نسبت بر او بیرون داخل



(ص ص ط)

که مقابل واقع شده است اعظم خواهد بود

ولکن (موجب مغروض) زاویه (ا ص ص) برابر است با زاویه (ص ص ط)

بنابرین هر دو حالت مراد ار اشد و این غیر ممکن است

لذا از این ثابت شد که (ب ا و ج د) از طرف (ب و د) پس از

امتداد در هیچ نقطه وصل نخواهند شد

و همین طور ثابت توان نمود که از طرف (ا و ج) هم بعد از امتداد در هیچ

جائی وصل نخواهند شد

و (محکم حد ۳) خطوط مستقیم که از هر دو طرف با استقامت

ممتد شوند و در هیچ جائی اتصال پیدا نکنند و تقاطع ننمایند

از خطوط متوازی نامند

پس خط (ا ب) و (س د) با هم متوازی میباشند

لذا هرگاه برد و خط مستقیم خط مستقیم دیگر واقع شود

تفصیل

(۱) عاقل یک بر خط مستقیم قائم شوند با هم متوازی میباشند

(۲) هرگاه زوایای شکل ذ و ا بر بعد الاضلاع قائم باشند آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود

(۳) هرگاه در ذ و ا بر بعد الاضلاع متقابل متوازی باشند آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود

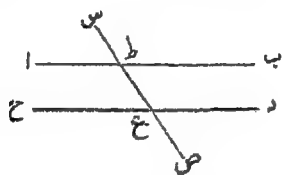
(۴) خطوطی که منصف زوایای متساوی باشند متوازی خواهند بود

(۵) شکل معین و شبه بالعیین هر دو متوازی الاضلاع میباشند

شکل (۲۸) اثباتی

هرگاه بر خط مستقیم خط مستقیم دیگر واقع شود و در یک سمت

خود زاویه خارج را بمساوی زاویه داخله که مقابل است پیدا کند یا اینکه
در یک سمت خود دو زاویه داخله با هم بمساوی و قائمه تشکیل نماید پس
دو خط مستقیم مذکور با هم متوازی خواهند بود



فرض کن دو خط مستقیم (اب) و (ج د) را خط مستقیم (س ص) فقط
(ط و ع) قطع نموده است

و در یک سمت خود زاویه خارج (س ط ب) را بمساوی زاویه داخله (ط ع د)
که در مقابل واقع شده پیدا کرده است
یا اینکه در یک سمت خود دو زاویه داخله

یعنی (ب ط ع) و (ط ع د) با هم بمساوی و قائمه پیدا کرده است

در هر صورت خط مستقیم (اب) متوازی (ج د) خواهد بود

ثبوت = چونکه (ب موجب فرض) زاویه (س ط ب) مساویست

با زاویه (ط ع د)

و (بحکم ۱۵) زاویه (س ط ب) مساویست با زاویه (ط ع د)

پس (بحکم علم ۱) زاویه (ط ع د) مساویست با زاویه (ط ع د)

و این زوایا متبادر اند

پس (بحکم ۲۷) (اب) و (ج د) با هم متوازی میباشند

و چون (به موجب مفروض) زاویتین (ب طع) و (طع د) با هم بمساکد و قائم اند
 و (بحکم ش ۱۳) زاویتین (ا طع) و (ب طع) نیز با هم بمساکد و قائم میباشند
 پس (بحکم علم ۱) زاویتین (ب طع) و (طع د) بمساو و زاویتین (ا طع) و (طع د)
 میباشند.

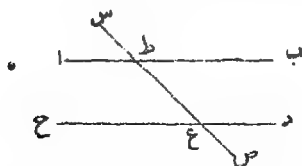
زیرا که هر صورتی بذات خود دو قائم است
 از هر یکی از این متساویات ساقط کن زاویه مشترکه (ب طع) را
 پس (بحکم علم ۳) باقی زاویه (ا طع) مساو باشد با باقی زاویه (طع د)
 و این زوایا متبادله اند.

بنابرین (بحکم ش ۲۷) (ا ب) با (ج د) متوازی میباشد.

لذا هرگاه برد و خط مستقیم الح

شکل (۲۹) اثباتی

هرگاه برد و خط مستقیم متوازی خط مستقیم دیگر واقع شود رویا
 متبادله آن با هم متساو خواهند بود و در یک سمت آن زاویه داخل
 و خارج که متناظرند با هم متساو خواهند بود و نیز در یک سمت
 دو زاویه داخله با هم بمساوی دو قائم خواهند بود



فرض کن (ا ب) و (ج د) دو خط مستقیم متوازی و خط مستقیم

(س) و آن واقع شده است -

لهذا شرایط ثلاثه ذیل در آن یافت خواهد شد -

اول = دو زاویه متبادله (اطع) و (طع) با هم متساوی خواهند بود -
 دوم = زاویه خارجی (س ط ب) با زاویه داخلی (طع د) که مقابل واقع
 شده مساوی خواهد بود -

سوم = دو یک سمت آن دو زاویه داخلی (ب طع) و (طع د) با هم مساوی
 دو قائم خواهند بود -

ثبوت = بدلیل آنکه هرگاه زاویه (اطع) بمساوی (طع د) نباشد
 لا بد یکی از آنها اعظم خواهد بود نسبت بدیگری -

در صورت امکان تصور نما زاویه (اطع) اعظم است از زاویه (طع د)
 بیفزای ب هر یکی از این غیر متساویات زاویه (ب طع) را
 لهذا مجموعه زاویتهین (اطع) و (ب طع) زیاده است
 نسبت بزاویتهین (ب طع) و (طع د)

ولکن (بحکم ۱۲) مجموعه زاویتهین (اطع) و (ب طع) بمساوی
 دو قائم میباشد -

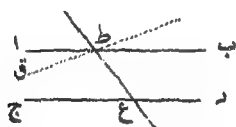
بنابر این زاویتهین (ب طع) و (طع د) نسبت بدو قائم کمتر خواهند بود
 لهذا (بحکم علم ۱۲) هرگاه خط (اب) و (ج د) پیوسته نمیشود
 در یک نقطه بطرف (ب) و (د) اتصال خواهند نمود
 و لکن خطین مذکوره پس از امتداد گاهی متصل نخواهند شد

زیرا که (بموجب مفروض) متوازی میباشند
 لهذا زاویه (اطع) با زاویه (طع) غیر مساوی نباشد
 یعنی با هم متساویند

لکن (بجمله ش ۱۰) زاویه (اطع) مساویت با زاویه (س ط ب)
 لهذا (بجمله علم ۱) زاویه (س ط ب) مساویت با زاویه (طع د)
 بیقراری بر هر یکی از این مساویات زاویه (ب طع) را
 پس (بجمله علم ۲) مجموع زاویتهای (س ط ب) و (ب طع)
 مساویت با زاویتهای (ب طع) و (طع د)

ولکن (بجمله ش ۱۳) زاویتهای (س ط ب) و (ب طع) برابر و قائم اند
 بنابراین (بجمله علم ۱) (ب طع) و (طع د) بمساوی دو قائم میباشند
 لهذا هرگاه بر دو خط مستقیم متوازی خط مستقیم الح

بعضی از مهندسیان شکل (۲۹) را این قسم ثابت کنند
 (علوم متعارفه = دو خط مستقیم متقاطع بمقتضای با خط مستقیم ثالث متوازی شوند)

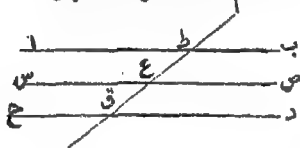


مثلاً هرگاه زاویه (اطع) بمساوی (طع د) نباشد
 پس باید یکی از آنها اعظم باشد نسبت دیگری
 تصور کن (اطع) اعظم است از زاویه (طع د)
 (بجمله ش ۲) در نقطه (ط) بساز زاویه (ع ط ق) را بمساوی زاویه (طع د) که متبادله باشد
 پس (بجمله ش ۲۷) (ق ط د) متوازیند
 لکن (بموجب مفروض) آب و ج د متوازی نیستند
 بنابراین دو خط متقاطع (اط) و (ق ط) متوازی نباشند (بارج د)

ولکن در حکم اینکه دو خط مستقیم متقاطع بمعیت با خط مستقیم ثالث ستواری نشوند
 این غیر ممکن است
 لهذا زاویه (اطع) با زاویه (طع) غیر مساوی نباشد
 یعنی هر دو با هم متساوینند
 نتیجتاً ثانی و ثالث شکل را توان با سلوب بحث دریافت
 حاشیه بدان علم دهند سه مسئله و شوارتر از مسئله خطوط متوازی بر نیت
 میهند پس برای انحلال مشکلات آن سعیها نموده و خواسته اند که جهت تفهیم
 مطلب طریق پیدا کنند که نسبت با قلبیدس اسهل باشد
 و لکن در نظر ساقیه دقایق بین پیدا است که آن دقتها مرفوع شده اند
 بر عایت اختصار در این مورد ذکر آن مطالب صرف نظر شد

شکل (۳) اثباتی

خطوط مستقیم که متوازی باشند باید خط مستقیم
 آن خطوط با هم متوازی خواهند بود



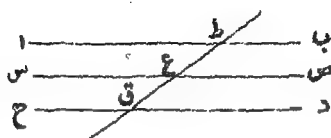
فرض کن از خطین (اب) و (ج د) هر یکی متوازی نسبت با (س ص)
 پس (اب) متوازی (ج د) خواهد بود

وضع شکل = چنان تصور نما که خط مستقیم (ط ق)

خطوط مستقیمه (اب) و (س ص) و (ج د) را در نقاط (ق)
 و (ع) و (ط) قطع میکنند

ثبوت = چونکه دو خط مستقیم متوازی را یعنی (اب) و (س ص)
 خط (ط ق) قطع میکند

لذا در حکم ۲۹ زاویه (اطع) مساویست با زاویه متساوی (طع ص)



اینجا چونکه خطوط متوازی (س ص) و (ج د) را خط مستقیم (ط ق) قطع میکند

لهذا (بجمله ش ۲۹) زاویه (ط ع ص) مساویت با زاویه (ط ق د) و اما در فوق ثابت شد که زاویه (ا ط ع) مساویت با زاویه (ط ع ص) لهذا (بجمله علم ۱) زاویه (ا ط ع) برابر شد با زاویه (ط ق د) و این زوایا متبادله میباشدند

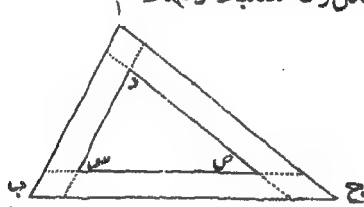
بنابراین (بجمله ش ۲۷) ا ب متوازی (ج د) میباشد

لهذا خطوط مستقیم که متوازی باشند

مشق

- (۱) هرگاه خط مستقیمی بر خطوط متوازی واقع شود و بر یکی از این خطوط عمود باشد بر با خطوط متوازی نیز عمود خواهد بود
- (۲) هرگاه ضلعین یک زاویه موافق نظیر خود با ضلعین زاویه دیگر متوازی باشند پس آن زوایا با هم متساوی خواهند بود
- (۳) شکل (۲۸) را با استعانت شکل (۲۷) ثابت کن
- (۴) حمص میباید یک میان خطوط متوازی واقع شوند با هم متساوی میباشدند
- (۵) هرگاه (ا ج د) و (ب ج د) دو زاویه متصلا باشند و خطی هم متوازی را (ب) واقع باشد پس خطوطی که تنسیف این زوایا میکنند بر با صله متساوی آن خط (ج د) با آن خط متوازی و صله خواهند شد
- (۶) هرگاه میان دو خط متوازی خط مستقیمی واقع شود و از نقطه (د) که وسط آن خط است خطی قاطع خارج شود پس مقدار خط قاطع که ما بین خطوط متوازی واقع شده است در نقطه (د) تنسیف خواهد شد
- (۷) از دو خط متوازی نقطه بر با صله متساوی واقع شده است

پس خط مستقیم که از دو آن نقطه بگذرد ما باینها حصص متوازیات با هم
متساوی خواهند بود
(۸) در مثلث متساوی الاضلاع چون دو خط متوازی با دو ضلع آن از نقطه وسط ضلع
سوم یا از هر نقطه از ضلع سوم خارج شوند از خود و ج آن
متوازی الاضلاع یک مربع در مجموع اضلاع آن دو چند با دو ضلع مثلث خواهد بود
(۹) سطح هر مثلث متساوی الاضلاع را باقیاتش چهار مثلث متساوی الاضلاع می باشد
که هر ساقی از این مثلثات بمساوی نصف ساق مثلث محیط خواهد بود
فهمیم = از مشق دوم این معنی هم استفاده میشود که ممکن است سه زاویه مثلثی علی التناهی
متساوی باشند باشد زاویه مثلث دیگر و سطوح آنها با هم متساوی نباشد
چنانچه از این شکل توان استنباط نمود -



مثلاً در مثلثین (ا ب ج) و (د س ص) ضلعین (ا ب) و (ا ج) با ضلعین (د س) و (د ص)
متوازیند
و نیز ضلع (ب ج) با (س ص) متوازی می باشد
یعنی سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر علی التناهی متوازیند
و نیز سه زاویه یک مثلث با سه زاویه مثلث دیگر موافق نظیر خود متساوی میشوند
ولکن سطوح آنها با هم متساوی نباشند
بین مشق سوم از (۸) و (بجمله ششم ۱۵) ثابت کن دعوی را -

شکل (۳۱) عملی

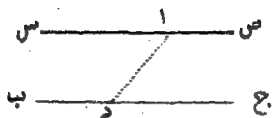
از نقطه مفروضه خارج کن خط مستقیمیکه متوازی باشد

با خط مستقیم مفروض



فرض کن (ا) نقطه مفروضه و (ب ج) خط مستقیم مفروض

مراد اینست که از نقطه (ا) خط مستقیم خارج شود که متوازی باشد با خط



مستقیم (ب ج)

وضع شکل = در (ب ج) معین کن نقطه مثلاً (د)

وصل کن (ا د) را

و (بحکم ۲۳) در خط مستقیم (ا د) سمت مقابل آن رسم کن زاویه

د ا س را

که مساوی باشد با زاویه (ا د ج)

خارج کن خط مستقیم (س ا) را تا نقطه (ص)

لهذا (س ص) با (ب ج) متوازی خواهد بود

ثبوت = زیرا که خط مستقیم (ا د) بر دو خط مستقیم (ب ج) و

س ص واقع شده است

و زوایای متبادله (س ا د) و (ا د ج) را متساوی احداث نموده

بنابرین (بحکم ۲۷) خط (س ص) با (ب ج) متوازی میباشد

لهذا از نقطه مفروضه (ب ج) خط مستقیم (س ا ص) متوازی با

خط مستقیم مفروض (ب ج) مرتبم گردید و مراد همین بوده

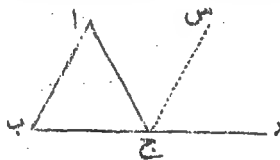
مشق

(۱) خطی که متوازی با (ا د) باشد مثلاً (ا ب) و (ا ج) خارج شود با اضلاع خود زوایای متساوی پیدا خواهد نمود

- (۲) خطی که منصف زاویه باشد از هر نقطه آن چون خط متوازی با یکی از ضلعین آن کشیده شود و از آن مثلثی متشکل گردد آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود.
- (۳) از یک نقطه خط مستقیم بی پایان خارج کرد یک خط مستقیم معلوم زاویه مساوی زاویه معلومه پیدا کند.
- (۴) در مثلث متساوی الساقین راجع از یک نقطه در خط مستقیم یک راجع قائم پیدا میکند خارج شده است.
- و راجع را در نقطه (س) و راجع را در نقطه (ص) قطع میکنند ثابت کن که مثلث (راس ص) متساوی الساقین است.
- (۵) خطی که منصف کند زاویه خارجی مثلث را هرگاه با ضلع مقابل متوازی واقع شود آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود.
- (۶) خط مستقیم معلوم را تثلیث کن =
- بر راجع باشد مثلث متساوی الاضلاع را زاویه (ا) و (ب) را بخنوط (د) و (ب) منصف کن که بر (د) موصول شوند از نقطه (د) خارج کن خطوط (د س) و (د ص) را قیما که متوازی باشند با (راج) و (بج) پس (س و ص) نقاط تثلیث راجع خواهند بود.
- (۷) پیدا کن نقطه وسط مثلث متساوی الاضلاع را

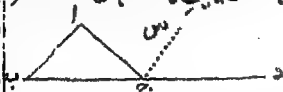
شکل (۳۲) اثباتی

هرگاه ضلع مثلثی امتداد شود زاویه خارجی که از آن تشکیل شد
بیشتر از زاویه داخلی که مقابل آن واقع شده اند میباشند
و مجموع زوایا مثلث بیشتر از قائم میباشند —
(این قاعده کلی را بدین خوبساز)



فرض کن (ابج) مثلث و ضلع (بج) تا نقطه (د) خارج شده است

لهذا زاویه خارجی (اج د) متساوی بود با زاویتین بمقابل که داخل اند



یعنی زاویه (ج اب) و (اب ج) —

و هر سه زاویه داخله مثلث بمساوی دو قائمه میباشند —

یعنی زاویه (اب ج) و (ب ج ا) و (ج اب) برابر دو قائمه اند —

وضع شکل = (بجکر ش ۳۱) از نقطه (ج) خارج کن خط (ج س) را

که متوازی باشد با خط (ب ا)

ثبوت = چون (اب) متوازی (ج س) است و (اج) بر آن واقع میشود

لهذا (بجکر ش ۲۹) دو زاویه متبادله (اج س) و (ب اج) با هم متساوی

ایضا چونکه (اب) متوازی (ج س) است و خط (ب د) بر آن واقع شد

لهذا (بجکر ش ۲۹) زاویه خارجی (س ج د) مساویت با زاویه

داخله (اب ج) که مقابل واقع شده است —

و در فوق ثابت شد که زاویتین (اج س) و (ب اج) با هم متساویند

لهذا (بجکر علم ۲) تمام زاویه خارجی (اج د) بمساوی دو زاویه داخله

(ج اب) و (اب ج) که در مقابل واقع شده اند میباشند —

بر هر یکی از این متساویات بیفزای زاویه (اج ب) را

پس مجموع زاویتین (اج د) و (اج ب) بمساوی سه زاویه

یعنی (ج اب) و (ب اج) و (اج ب) میباشند —

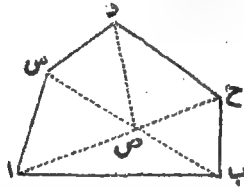
لکن (بجکر ش ۱۳) زاویتین (اج د) و (اج ب) بمساوی دو قائم میباشند

پس (بجکر علم ۱) مجموع زوایای ثلاثه

یعنی (بج ب ا) و (بج ب) و (بج ب) مساوی دو قائمه میباشند
 لهذا هرگاه ضلع مثلثی امتداد شود الح

نتایج

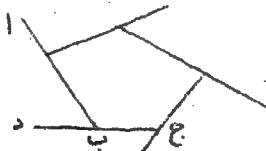
(۱) مجموعه زوایای داخل هر شکل مستقیم الاضلاع مع چهار قائم که بر آن
 افزوده شود مساویست با قوای که عدد آن دو چند اعداد اضلاع آن شکل باشد



مثلاً هرگاه در شکل مستقیم الاضلاع (بج ب دس) نقطه فضا (ص) معین نموده
 گوشه های شکل را بخاطر مستقیم وصل دهیم
 پس شکل مذکور به منقسم خواهد شد در مثلثاتی که عدد آن بقدر اضلاع شکل باشد
 و چون (بج ب دس) مجموعه زوایای داخل هر مثلث بمساوی دو قائم میباشند
 و نیز چونکه مثلثات شکل مذکور به قدر اضلاع آنست
 لهذا مجموعه زوایای داخل مثلثات بقدر آن قوایم است
 که عدد آنها دو چند اعداد اضلاع آن شکل باشد

لکن این واکه مذکور شده ساینده یا زوایای داخل شکل مع آن زوایا که در نقطه (ص) متشکل شده
 و اما (بج ب دس) بر نقطه (ص) که در آن متشکل شده هر مثلثات است
 مجموعه کل زوایا بمساوی چهار قائم میباشند
 لهذا مجموعه زوایای داخل هر شکل الح

(۲) مجموعه زوایای خارج هر شکل مستقیم الاضلاع بمساوی چهار قائم میباشند



چونکه (بج ب دس) هر زاویه داخل مثلاً زاویه (بج ب) مع زاویه خارج (ب د) که
 متصل است بر یک خط دو قائم
 لهذا مجموعه تمام زوایای داخل و تمام زوایای خارج بمساوی آن قوایم است

که عدد آنها مضاعف اعداد شکل مستقیم الاضلاع باشد. و اما موجب تقیید آن مجموعه زوایای داخله مع چهار قائمه برابر است با آن توانم کرد آنها را دو چند اعداد الاضلاع آن شکل باشد.

پس بحکم علم مجموعه تمام زوایای داخله و خارجیه بمساوی مجموعه کل زوایای داخله مع چهار قائمه میباشد.



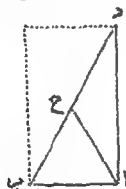
انفس یکی از این متساویات ساقط کن زوایای داخله را پس مجموعه زوایای خارجیه بمساوی چهار قائمه میباشد.

هذا مجموعه زوایای خارجیه هر شکل الخ

تفهیم = این نتائج مفید را بدین خود بسیار. هرگاه يك زاویه مثلث مساوی باشد با مجموعه دو زاویه دیگر

- (۱) پس آن زاویه قائمه خواهد بود.
- (۲) هر زاویه مثلث مساوی الاضلاع بمساوی دو ثلث $(\frac{2}{3})$ يك قائمه میباشد.
- (۳) یا اینکه بمساوی يك ثلث $(\frac{1}{3})$ دو قائمه میباشد.
- (۴) هرگاه دو مثلث مساوی الساقین يك زاویه قائمه باشد پس هر یکی از باقی زاویاتین نصف قائمه خواهد بود.
- (۵) مجموعه دو زاویه يك مثلث = هرگاه برابر يك قائمه باشد پس زاویه سوم قائمه خواهد بود (اول).
- و این مثلث را مثلث قائم الزاویه گویند.
- (ثانی) هرگاه کمتر از يك قائم باشد پس زاویه سوم منفرجه خواهد بود و این مثلث را مثلث منفرجه الزاویه گویند.
- (سوم) هرگاه زیاده از يك قائم باشد پس زاویه سوم حاده خواهد بود و این مثلث را مثلث حاده الزاویه نامند.
- در مثلثی که دو زاویه معلوم باشد پس زاویه سوم معلوم خواهد بود.

نتایج فوق را از این شکل توان استنباط نمود



بسیار برخط (اب) مثلث متساوی الاضلاع (ابج) را خارج کن (بج) را تا نقطه (د) قسمی که (ج د) برابر باشد (بج) را وصل کن (اد) را در این صورت زاویه (د اب) قائم خواهد بود زیرا که (بج) (ش) زاویه (ج ا د) مساویت با زاویه (ج د ا)

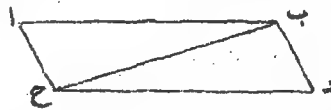
و زاویه (ج ب ا) مساویت با زاویه (ج ب ا)
 لهذا (بجک عمده) زاویه (ب ا د) قائمه می باشد
 پس (بجک ش ۳) مجموعه دو زاویه دیگر
 یعنی (ا ب د) و (ا د ب) برابر يك قائمه می باشد
 باقی نتایج را خود ثابت کن

مشق

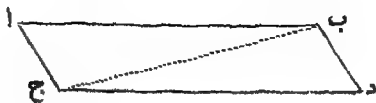
- (۱) دو مثلث حاد الزوایا مجموعه دو زاویه بیشتر است نسبت به زاویه متوکل
- (۲) هرگاه در مثلث (ا ب ج) ضلع (ب ج) تا نقطه (د) خارج شود و خط (ا س) زاویه (ب ا ج) را نصف نموده با (ب ج) دو نقطه (س) وصل شود ثابت کن که مجموعه زاویه (ا ب د) و (ا ج د) دو چندانست نسبت به زاویه (ا س د)
- (۳) هرگاه دو زاویه قائمه مثلث متساوی الساقین را دو خط مستقیم نصف نموده بهم وصل شوند پس زاویه که از این دو خط متشکل گردد مساویت با زاویه خارجی که بر قاعده آن شکل متشکل شود
- (۴) مجموعه تمام زوایای خارجی هر شکل دوار به اضلاع مساوی چهار قائمه می باشد ثابت کن
- (۵) ثابت کن مجموعه تمام زوایای داخله شکل سدس مساوی هشت قائمه می باشد
- (۶) هر زاویه مثلث متساوی الزوایا بقدر (۱۲۰) يك قائمه مع يك خمس قائمه می باشد ثابت کن
- (۷) بنابر اضلاع خواهد بود آن شکل مستقیمه الاضلاع را که مجموعه زوایای داخله آن دو چندان باشد نسبت به زوایای خارجی آن

شکل (۳۳) اثباتی

هرگاه در يك سمت هر طرفی از طرف دو خط مستقیم متوازی و متساوی را دو خط مستقیم دیگر وصل دهند پس این دو خط واصل هم متوازی و متساوی خواهند بود



فرض کن (ا ب) و (ج د) دو خط مستقیم متوازی و متساویند
 وصل کن نقاط اطراف آنها را بدو خط مستقیم (ا ج) و (ب د)
 پس خطین (ا ج) و (ب د) با هم متوازی و متساوی خواهند بود



وضع شکل = وصل کن وتر (ب ج) را -

ثبوت = چونکه (ب موجب مفروض) (ا ب) متوازی (ج د) است

و خط (ب ج) بر آن واقع میشود

لذا (بحکم ۲۹) زاویه متبادله (ا ب ج) و (ب ج د) با هم متساو ^{میشوند}

ایضا چونکه (ب موجب مفروض) (ا ب) بمساوی (ج د) است

و خط (ب ج) نسبت بمثلثین (ا ب ج) و (ب ج د) مشترک است

لذا ضلعین (ا ب) و (ب ج) بمساوی ضلعین (ج د) و (ب ج) میباشد

هر یکی موافق نظیر خود

و زاویه (ا ب ج) بمساوی (ب ج د) که متبادله اند ثابت و مذکور شد -

لذا (بحکم ۲۷) قاعده (ا ج) بمساوی قاعده (ب د) و مثلث (ا ب ج)

بمساوی مثلث (ب ج د) میباشد -

و نیز زوایای که مقابل اضلاع متساویه واقعند با نظر ^{بند} متساوی

لذا زاویه (ا ج ب) بمساوی زاویه (ج ب د) میباشد -

ایضا چونکه خط مستقیم (ب ج) بر دو خط مستقیم (ا ج) و (ب د)

واقع میشود

و زوایای متبادله (ا ج ب) و (ج ب د) را متساوی تشکیل میدهد

یعنی مربع مستطیل معین شده معین است
 و هرگاه اضلاع متقابل آن متوازی نباشند
 آن اشکال از اقسام ضعیف تر میباشند
 یعنی توان گفت یکی از اشکال ضعیف تر از دیگر اضلاع
 و لکن نتوان گفت متوازی الاضلاع (بین حد ۲۴) -
 در متوازی الاضلاع =

(۲)

(اول) هرگاه یک زاویه قائمه باشد باقی زوایا نیز قائم خواهند بود -
 (دوم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی و زاویه قائم باشد - آن شکل مربع خواهد بود
 (سوم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی باشند - آن شکل معین یا مربع خواهد بود
 (چهارم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی باشند - او تار آن بر تمام نقاط خواهد بود
 (پنجم) هرگاه اضلاع بر یکدیگر عمود باشند - آن شکل مربع یا معین خواهد بود -
 (و تر را کاهی قسط خوانند)
 (ششم) هرگاه اضلاع تنصیف زوایای موصوله نمود نمایند - آن شکل معین یا مربع
 خواهد بود -

(هفتم) هرگاه اضلاع متساوی باشند - تمام زوایای آن قائم خواهند بود -

(۳)

در ذوات متوازی الاضلاع =
 (اول) هرگاه اضلاع متقابل متساوی باشند - آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
 (دوم) هرگاه زوایای متقابل متساوی باشند - آن شکل متوازی الاضلاع
 خواهد بود -
 (سوم) هرگاه او تار تنصیف یکدیگر نمایند - آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
 (چهارم) هرگاه وتر تنصیف شکل نمایند - آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
 (۴) اشکال چهار گوشه که قائم الزاویه نباشند - او تار آن متساوی نخواهند بود -

مشق =

(۱) ا ب ج د متوازی الاضلاع است

ص و ص ا نقاط وسط در (ا د) و (ب ج)

ثابت کن که ا ص ج ص متوازی الاضلاع میباشد -
 (۲) هرگاه در دو متوازی الاضلاع ضلعین متصله یکی با ضلعین متصله دیگر متساوی باشند
 و زوایای متقابل این دو ضلعین هم متساوی باشند
 ثابت کن که دو متوازی الاضلاع از هر حیثیت با هم متساوی خواهند بود -

(۳) هرگاه در دو مستطیل ضلعین متصله یکی با ضلعین متصله دیگر متساوی باشند
 ثابت کن که هر دو مستطیل با هم متساوی خواهند بود -

فصل سوم

سطوح متوازی الاضلاع و مثلثات

توضیح = در دو فصل پیش که ذکر مساوات اشکال شده است

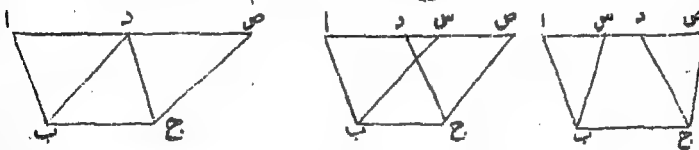
از هر حیثیت با هم برابر یعنی متساوی الاجزاء بوده اند
و حکوم بعمل انطباق (بین تفهیم فقره هشتم از علوم متعارف)
ولکن بعد از این یعنی در فصل سوم ذکر مساوات متوازی الاضلاع
و مثلثات بلحاظ سطوح خواهد بود
لازم نیست بر یکدیگر منطبق شوند
یعنی این اشکال حتی وقتیکه متساوی نباشند که بعضی از تبدیل نمودن شکل عمل انطباق واقع شود
لذا در این فصل عمل انطباق معمول نباشد

حدود

- (۱) ارتفاع متوازی الاضلاع آن فاصله عمودیت که مابین قاعده و ضلع مقابل واقع شود
(۲) ارتفاع مثلث آن فاصله عمودیت
که مابین رأس و قاعده آن واقع شود

شکل (۳۵) اثباتی

اشکال متوازی الاضلاع که بر یک قاعده و در میان دو
خط متوازی واقع شوند با هم متساوی میباشند



فرض کن (ا ب ج د) و (س ب ج ص) اشکال متوازی الاضلاع باشند

و بر یک قاعده (ب ج) مابین متوازیین (ا ص) و (س ج) واقع

پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) مساوی متوازی الاضلاع (س ب ج ص)
خواهد بود

صورت اول = هرگاه در هر دو متوازی الاضلاع معلوم

ضلعی نباشد که مقابل قاعده (ب ج) واقع شده اند

در یک نقطه (د) منتهی شوند

در اینصورت (بحکم ش ۳۴) ظاهر است که هر متوازی الاضلاع مضاعف
مثلاً (د ب ج) خواهد بود.

لذا (بحکم علم ۶) با هم متساوی میباشند.

صورت دوم = هرگاه در هر دو متوازی الاضلاع مذکور

ضلعین (ا د) و (س ص) در یک نقطه (د) منتهی نباشند

پس چونکه (ا ب ج د) متوازی الاضلاع میباشد

لذا (بحکم ش ۳۴) ضلعین (ا د) و (ب ج) با هم متساویند.

و بهین دلیل ضلع (س ص) مساوی است با ضلع (ب ج)

لذا (بحکم علم ۱) (ا د) مساوی (س ص) میباشد.

ایضاً (بحکم علم ۲-۳) کل (ا س) یا اینکه بقیه آن مساویت با

کل یا اینکه با بقیه (د ص)

و (بحکم ش ۳۴) (ا ب) مساوی (د ج) میباشد

لذا ضلعین (س ل) و (ا ب) مساویند با ضلعین (ص د) و (د ج) هر

جزوی با نظیر خود موافق.

و (بحکم ش ۲۹) زاویه خارجی (ص د ج) برابر است با زاویه داخلی

(س ا ب) که مقابل واقع شده است.

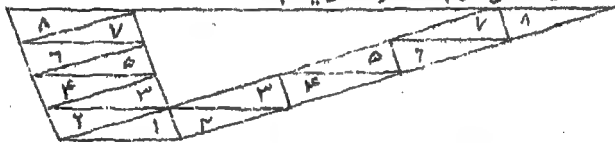
لذا (بحکم ش ۳۴) مثلاً (ص د ج) مساویت با مثلاً

(س ا ب)

از شکل منفرجه (ا ب ج ص) ساقط کن مثلاً (ص ج د) را

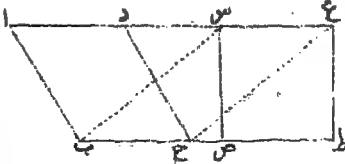
ایضا از شکل مذکور ساق کن مثلث (س اب) را
 هر دو بعد از اسقاط متساویات ملاحظه کن چه باقی می ماند
 لهذا (بحکم علم ۳) بعد از اسقاط مثلث در هر مرتبه
 باقیات با هم متساوی می باشند
 یعنی متوابع الاضلاع (اب ج د)
 مساوی متوابع الاضلاع (س ب ج ص) می باشند

لهذا اشکال متوابع الاضلاع که بر یک قاعده الح
 توضیح = هرگاه از یک زاویه متوابع الاضلاع تا نقطه وسط ضلع مقابل خطی خارج شود
 و از هر یک آن مثلثی که متشکل میگردد
 آن مثلث مساوی ربع متوابع الاضلاع خواهد بود
 چنانچه از این شکل نشانی خاطر مستدی خواهد شد
 و نیز معلوم شود که در متوابع الاضلاع بر یک قاعده و مابین
 دو خط متوابعی با هم متساویند



شکل (۳۶) اثباتی

اشکال متوابع الاضلاع که بر قواعد متساویه و مابین دو خط
 متواضع واقع باشند با هم متساوی خواهند بود



فرض کن (اب ج د) و (س و ص ط ع) اشکال متوابع الاضلاع

و بر قواعد متساویه (ب ج) و (ص ط) مابین متوازیین (ا ع) و (ب ط) واقع میباشند.

پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) بمساوی (س ص ط ع) خواهد بود.

وضع شکل = وصل کن (ب س) و (ج ع) را

ثبوت = چونکه (ب موجب مفروض) (ب ج) بمساوی (ص ط) میباشد

و (بحکم ش ۳۴) (ص ط) بمساوی (س ع)

لهذا (بحکم علم ۱) (ب ج) مساویت با (س ع)

و (ب موجب مفروض) خطوط مذکوره نیز متوازی میباشد.

و هر طرفی از اطراف آنها بخطوط مستقیمه (ب س) و (ج ع)

موصول شده است

(بحکم ش ۳۳) خطوط مستقیمه که واصل هر طرفی از طرفین

خطوط مستقیمه متوازی و متساویه باشند

آن خطوط نیز با هم متساوی و متوازی خواهند بود.

لهذا خطین (ب س) و (ج ع) با هم متساوی و متوازی میباشند.

پس (بحکم حد و د) (س ب ج ع) شکل چهار گوشه یعنی متوازی الاضلاع

میباشد.

لهذا (بحکم ش ۳۵) مساویت با متوازی الاضلاع (ا ب ج د)

زیرا که بر یک قاعده (ب ج) و مابین متوازیین (ب ط) و (ا ع) واقع

شده اند.

و نیز همین دلیل متوالی الاضلاع (س ص ط ع) .

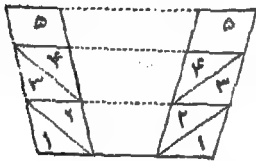
مساویت با متوالی الاضلاع (س ب ج ع) .

پس (بجکر علم) متوازی الاضلاع (ا ب ج د) .

مساویت با متوازی الاضلاع (س ص ط ع) .

لهذا اشکال متوالی الاضلاع که بر قواعد متساویه الح

- تفہیم = درد و بحث او خرابی (۳۵) و (۳۶) منتهی میشود =
- (۱) سطح متوازی الاضلاع مساویت با آن مستطیل قائم الزاویه که ارتفاع و قاعده آن برابر باشد یا ارتفاع و قاعده متوازی الاضلاع مذکور =
 - (۲) سطوح اشکال متوازی الاضلاع که ارتفاع و قواعد با هم برابر باشد با هم متساوی خواهند بود
 - (۳) درد وسط متوازی الاضلاع که ارتفاع آن با هم متساوی باشد اعظم است آنکه قاعده اش اطول است
 - (۴) درد وسط متوازی الاضلاع که قواعد آن با هم متساوی باشند اعظم است آنکه ارتفاع باشد

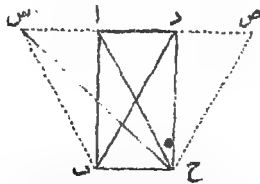


(۵) از این شکل ظاهر شود که اشکال متوازی الاضلاع که بر قواعد متساویه و مابین متوازیین باشند با هم متساویند

شکل (۳۷) اثباتی

مثلاً که بر یک قاعده و مابین متوازیین واقع شوند با هم

متساوی خواهند بود

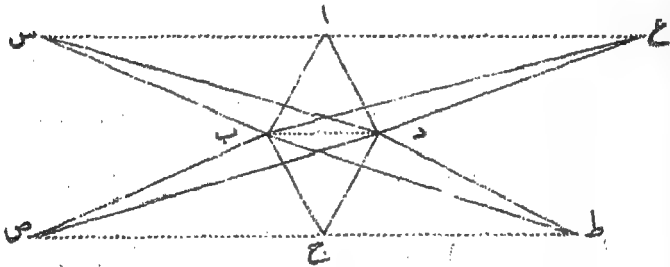


فرض کن (ابج) و (دبج) دو مثلث و بر یک قاعده (بج) و
 و مابین متوازیین (اد) و (بج) واقع شده اند -
 پس مثلث (ابج) بمساوت مثلث (دبج) خواهد بود -
 وضع شکل (بحکم اصول) خارج کن خط مدوئه (اد) را از
 هر دو طرف
 تا نقطه (س) و (ص)
 و (بحکم ش ۳۱) از نقطه (ب) خارج کن خط (ب س) را
 که متوازی باشد با خط (اج)
 و از نقطه (ج) خارج کن خط (ج ص) را
 که متوازی باشد با خط (ب د)
 ثبوت = پس (بحکم حدود) هر یکی از دو شکل
 یعنی (س ب ج ا) و (د ب ج ص) متوابع الاضلاع میباشد -
 و (بحکم ش ۳۵) (س ب ج ا) بمساوت (د ب ج ص) میباشد -
 زیرا که بر یک قاعده (بج) و مابین متوازیین (بج) و (س ص)
 واقعند -
 و مثلث (ابج) نصف متوابع الاضلاع (س ب ج ا) میباشد
 لهذا (بحکم ش ۳۴) (اب) منصف متوابع الاضلاع میباشد
 یعنی تنصیف میکند (س ب ج ا) را -
 و مثلث (دبج) نصف متوابع الاضلاع (د ب ج ص) میباشد

لهذا (بحکم ۳۶) (دج) تنصیف میکند متوازی الاضلاع
(د ب ج ص) را -

لهذا (بحکم علم ۷) اشیائی که نسبت به یکدیگر نصف باشند
ان اشیاء با هم متساویند -

پس مثلث (ا ب ج) بمساوی مثلث (د ب ج) میباشد -
لهذا مثلثات کبریک قاعد الح



سؤال = (۱) در چه صورتی توان ثابت نمود که مجموع مثلثات اربعه
یعنی (س ب د) و (س ب ح) و (ط د ب) و (ع د ب)

دو چند است نسبت به متوازی الاضلاع (ا ب ج د)

جواب = در صورتیکه (س ع) و (ط ص) متوازی باشند یا (ا ب د)

سؤال = (۲) در چه صورتی توان ثابت نمود که یکی از مثلثات اربعه

مثلاً (ع ب د) مساویت با مثلث (ا ب د) -

جواب = در صورتیکه (ب د) متوازی (س ع) یا (ا ع) باشد -

مشق =

(۱) در شکل (۳۷) (ا ب ج) و (ب د) در نقطه (ط) تقاطع نموده اند
ثابت کن =

(اول) مثلثین (ا ب ط) و (د ب ط) با هم متساویند

(دوم) اشکال ذرا بفرمایید الاضلاع (س ب ط) و (ص ج ط) با هم متساویند -

(۲) در شکل (۱۶) ثابت کن مثلثین (ا ب ج) و (ص ج ب) با هم متساویند -

(۳) بر قاعده مثلث معلوم ساز مختلف مساوی الساقین را قسمی

که سطح آن متساوی باشد با مثلث معلومه (۴)
 هرگاه نقاط وسط دو ساق مثلث متساوی الساقین را وصل کنیم
 و از آن نقاط عمود بر قاعده قائم سازیم
 متوازی الاضلاع که از این عمل میسر گردد
 ثابت کن متساوی نصف متساوی الساقین معلوم خواهد بود

شکل (۲۸) اثباتی

مثلثی بر قواعد متساوی و مابین دو خط متوازی واقع باشند
 با هم متساوی خواهند بود



فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث

و بر قواعد متساوی (ب ج) و (س ص) مابین متوازیین (ب ص) و (ا د) واقع شده اند

پس مثلث (ا ب ج) بمساوی مثلث (د س ص) خواهد بود

وضع شکل = خط عمود د ه را د را خارج کن از هر دو طرف

تا بنقطه (ع) و (ط) =

و (ب) که ش ۳۱ از نقطه (ب) خارج کن خط (ب ط) را

که متوازی باشد با خط (ا ج)

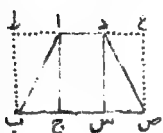
و از نقطه (ص) خارج کن خط (ص ع) را

که متوازی باشد با خط (س د)

ثبوت = لهذا (ب ج) حدود هر یک از سطحین (ط ب ج) و

(دس ص) متوازی الاضلاع میباشند.

و كذلك (بحکم ش ۳۷) باهم متساوی میباشند
 زیرا که بر دو قاعده متساوی (ب ج) و (س ص)

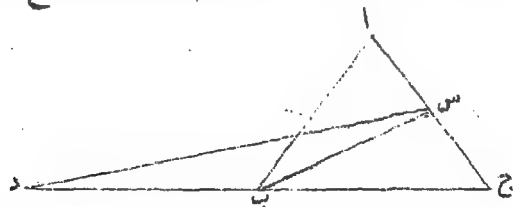


و مابین متوازیین (ب ص) و (ط ج) واقع شده اند.

و چونکه قطر (ا ب) تنصیف میکند متوازی الاضلاع (ط ج) را
 لهذا (بحکم ش ۳۴) مثلث (ا ب ج) بقدر نصف متوازی الاضلاع
 معلوم میباشند.

ایضا چونکه قطر (د ص) تنصیف میکند متوازی الاضلاع (د س ص)
 لهذا مثلث (د س ص) بقدر نصف متوازی الاضلاع میباشند
 و چونکه (بحکم علم ۷) اشیائی که نسبت یکجری نصف باشند
 آن اشیاء باهم متساوینند.

پس مثلث (ا ب ج) بمساوی مثلث (د س ص) میباشند.
 لهذا مثلثات که بر قواعده متساویه الم



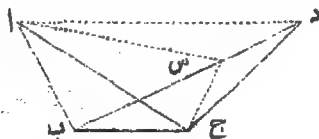
سؤال = در چه صورتی توان ثابت نمود که مثلثین (ا ب ج) و (د ج س) باهم متساوینند
 جواب = در صورتیکه (ب س) تنصیف نماید ضلعین (ا ج) و (د ج) را.

مشق (۱) هر مثلثی تقسیم شود از خط متوسط خود در دو قسمت متساوی.

- و مراد از نقطه متوسط خطی است که از یک زاویه مثلث تا نقطه وسط ضلع مقابل خارج شود
- (۲) هر متوازی الاضلاع را اقطار تقسیم میکنند در چهار مثلث که سطوح آنها با هم متساوی باشند
- (۳) (ا ب ج) مثلثی است و قاعده (ب ج) در نقطه (د) تنصیف میشود پس هرگاه دو متوسط (ا د) نقطه مثلث (ر س) واقع شود ثابت کن که مثلث (ا ب س) مساوی است با مثلث (ا ج س)
- (۴) (ا ب ج د) متوازی الاضلاعی است و در وتر (ا ج) نقطه مثلث (ر س) معین شده است و (ب س) و (ر س) د) موصول شده اند ثابت کن مثلث (ب ا س) مساویت با مثلث (د ا س)
- (۵) هرگاه در دو مثلث ضلعین هر یکی علی التناظر با هم متوافق باشند و زوایای متشکله این اضلاع مکمل یکدیگر باشند پس سطوح هر دو مثلث با هم متساوی خواهند بود
- مکمل یکدیگر یعنی مجموعه هر دو یک قائمه باشد

شکل (۳۹) اثباتی

مثلثات متساوی که بر یک قاعده و در یک سمت باشند واقع میشوند مابین دو خط متوازی



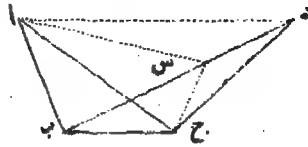
فرض کن (ا ب ج) و (د ب ج) دو مثلث متساوی و در یک سمت بر قاعده (ب ج) واقع شده اند

پس هر دو مثلث مابین متوازیین واقع خواهند شد

یعنی هرگاه (ا د) موصول شود پس (ا د) متوازی (ب ج) خواهد بود

بدلیل اینکه هرگاه چنین نباشد

(۱) وضع شکل = پس (ب ج م ش ۳۱) بشرط امکا خارج کن از نقطه



خط اس را که متوازی باشد با ر ب ج (

وصل کن ر س ج را

ثبوت = لهذا (بحکم ۳۷) مثلث ر ا ب ج مساوی با مثلث ر ب ج

زیرا که هر دو بر یک قاعده ر ب ج مابین متوازیین ر ب ج و ر اس واقع شده اند

لکن (بموجب مفروض) ر ا ب ج مساوی مثلث ر د ب ج میباشد

پس (بحکم علم ۱) مثلث ر د ب ج برابر است با مثلث ر ب ج

یعنی مثلث بزرگ مساویست با مثلث کوچک

و این امر غیر ممکن است

زیرا که جزء با کل برابر نباشد

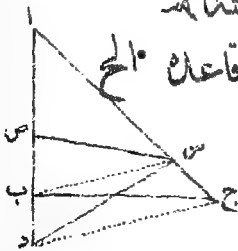
لهذا ر اس متوازی نباشد ر ب ج را

و بهین دلیل ثابت توان نمود

که بغیر از خط ر ا د هیچ خط مستقیمی متوازی ر ب ج نخواهد شد

پس خط ر ا د متوازی خط ر ب ج میباشد

لهذا مثلثات متساویه که بر یک قاعده



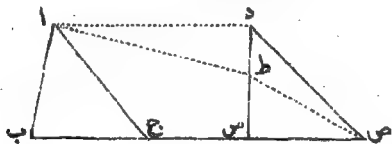
سؤال (۱) در چه صورتی توان ثابت نمود
که مثلثین (ا ب ج) و (ا د س) با هم متساوینند؟
جواب = در صورتیکه (ب س) متوازی باشد (د ج) را
سؤال (۲) در چه صورتی توان ثابت نمود
که (س ص) تنصیف نموده است هر دو مثلث را
یعنی (ا ب ج) و (ا د س) را
جواب = در صورتیکه (س) نقطه وسط (ا د) باشد.

مشق هرگاه نقاط وسط اضلاع مثلثی را

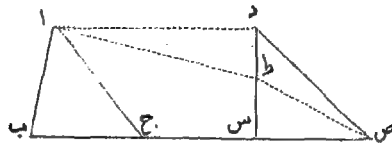
- (۱) ب خط مستقیم وصل نمایم
این خط با تاغده آن متوازی خواهد بود.
- (۲) هرگاه دو خط مستقیم (ا ب ج) و (د ج) بر نقطه (س) تقاطع نمایند
قسمیکه مثلث (ا س ج) مساوی باشد با مثلث (د س ب)
ثابت کن (ا د و ج ب) متوازییند.
- (۳) هرگاه در سؤال شکل (۳) را د و ج ب را وصل شود
ثابت کن که مثلثین (ا ب ج) و (د ب ج) با هم متساوینند.
- (۴) در شکل مذکور (س) نقطه تقاطع (ا ب) و (د س) است
ثابت کن =
(اول) مثلث (ا د س) مساویت با ذو اربعه الاضلاع (ب ج س ص) است.
(دوم) مثلثین (ا س ص) و (د ب ص) با هم متساوینند.

شکل (۴) اثباتی

مثلثات متساویر که قائم بر یک جانب قواعد متساویر
و متمم بر یک مستقیمند واقع شوند مابین خطوط متوازی



فرض کن دو مثلث (ا ب ج) و (د س ص) در یک جانب بر قواعد
متساویر (ب ج) و (س ص)
و بر یک خط مستقیم (ب ص) واقع شده اند.



پس هر دو مثلث مابین متوازیین واقع خواهند شد -
 یعنی هرگاه (اد) را وصل کنیم
 متوازی (بص) خواهد بود -
 و هرگاه چنین نباشد

وضع شکل = پس (بحکم ش ۳۱) بشرط امکان
 از نقطه (ا) خارج کن (اط) را که متوازی باشد با خط (بص) -
 وصل کن (ص ط) را

ثبوت پس (بحکم ش ۳۸) مثلث (ابج) برابر است با مثلث
 (ط س ص) -

زیرا که بر قواعد متساوی (بج) و (س ص)

و مابین متوازیین (بص) و (اد) واقع شده اند

لکن (موجب مفروض) مثلث (ابج) مساویست با مثلث
 (د س ص) -

لذا (بحکم علم ۱) مثلث (د س ص) مساوی شد با مثلث
 (ط س ص) -

یعنی مثلث بزرگ مساوی شد با مثلث کوچک و این غیر ممکن است

لهذا را (ط) متوازی نباشد (ب ص) را «
 و همین دلیل ثابت توان نمود که بغیر از خط (ا د)
 هیچ خط مستقیمی متوازی نخواهد شد (ب ص) را
 پس (ا د) متوازی میباشد (ب ص) را
 لهذا مُثَلَّثات متساویه که قائم الح
 تفهیم =

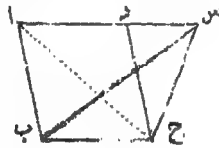
- (۱) این دعوی را با سلوب دیگر نیز ثابت کنند که احتیاج برهان خلف نباشد
 و صد کن (ب د) و رج (د را)
 پس (ب ج) مثلثین (د ب ج) و (د س ص) با هم متساویند
 و لکن (ب ج) مفروض مثلث (ا ب ج) مساویست با مثلث (د س ص)
 پس (ب ج) مثلثین (د ب ج) و (ا ب ج) با هم متساوی میباشد
 لهذا (ب ج) مثلث (د ب ج) متوازی (ا د) میباشد «
 چون در هر مثلث خطی که از نقطه رأس آن تا نقطه وسط قاعده خارج شود
 آن خط تنصیف مثلث میکند
 و لکن بغیر از نقاط مذکور
 نقاطی در اضلاع مثلث میباشد که از اینجا توان تنصیف هر مثلث نمود
 باین سؤالات شکل (۳۹)
 میخواهم مثلث (ا ب ج) را از نقطه (س) تنصیف نمایم
 و صد کن (س ب) را
 از نقطه (ج) خارج کن خط رج (د) را که متوازی با (س ب) باشد
 و صد کن (س د) را
 تنصیف کن مثلث (س ا د) را بخط (س ص) «
 پس مثلث (ا ب ج) از نقطه (س) تنصیف شده است
 «در آن کن این نکته را که چرا متوازی (س ب) از نقطه (ج) خارج شده است
 چرا ممکن بود متوازی (س ب) «
 «از نقطه (ا) خارج شود» «

مشق =
 (۱) در سؤالات شکل (۳۹)
 مثلث (ا ب ج) از نقطه (س) تنصیف شده است
 پس در ضلع (ا ب) معین کن نقطه را و از آن نقطه تنصیف کن مثلث را «

- (۲) دو صورتیکه در آن منصف مثلثین ABC و ADS میباشد ثابت کن که دواریه اضلاع AB و CD مساویت با مثلث ADS میباشد.
- (۳) ایضا چون AB و CD متوازی و AD و BC مساوی باشند ثابت کن مثلثین ABC و DCB و ADS و BCD متساوی باشند و اگر AD و BC متساوی نباشند.

شکل (۴۱) اثباتی

هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بزرگ و مابین متوازی واقع باشند پس متوازی الاضلاع و چند مثلث خواهند بود



فرض کن متوازی الاضلاع $ABCD$ و مثلث ADS مابین متوازیین AB و CD واقع شده اند.

پس متوازی الاضلاع $ABCD$ مضاعف مثلث ADS خواهد بود.

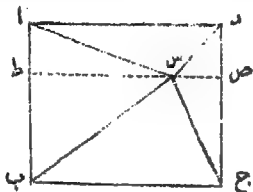
وضع شکل = وصل کن AC را

پس (بجمله ۳۷) مثلث ABC برابر است با مثلث DCB (س.ج.)

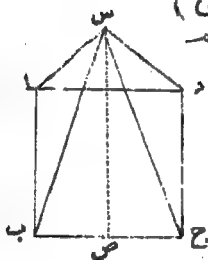
ثبوت = زیرا که هر یک قاعد AB و CD و مابین متوازیین AD و BC واقع میباشد.

لکن متوازی الاضلاع $ABCD$ دو چند است نسبت به مثلث ADS زیرا که (بجمله ۳۴) قطر AC تنصیف میکند متوازی الاضلاع $ABCD$ پس متوازی الاضلاع $ABCD$ دو چند است نسبت به مثلث ADS (س.ج.)

لهذا هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بر یک قاعده الح



سؤال = (۱) در متوازی الاضلاع (ا ب ج د) -
چهارم توان ثابت نمود که مجموع مثلثین (س ا ب) و (س ج د) مساویست با مجموع مثلثین (س د ا) و (س ج ب)
جواب = ازاخراج خط (ص ط) که متوازی باشد با (ا د) یا (ب ج) و قاطع باشد نقطه رؤس مثلثین متقابل را -



سؤال = (۲) در متوازی الاضلاع (ا ب ج د) -
چهارم توان ثابت نمود که مجموع مثلثین (س ب ا) و (س ج د) بمساوی نصف متوازی الاضلاع معلوم است
جواب = هرگاه از رؤس مثلثین خارج شود خط (س ص) که متوازی باشد با (ا ب) ثبوت دعوی معلوم خواهد بود -

مشق (۱) در شکل (۴) از نقطه (ج) خارج کن متوازی (ب س) و ثابت کن شکل را -

(۲) هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بر قاعده متساوی و مابین متوازیین واقع شوند

پس متوازی الاضلاع نسبت بمثلث دوچند خواهد بود -

(۳) هرگاه قاعده مثلثی دوچند باشد نسبت بمتوازی الاضلاع و هر دو مابین متوازیین باشند

پس هر دو با هم متساوی خواهند بود -

(۴) هرگاه در سطح متوازی الاضلاع نقطه معین شود

و از آن نقطه تا گوشه های شکل خطوط مستقیم خارج شوند

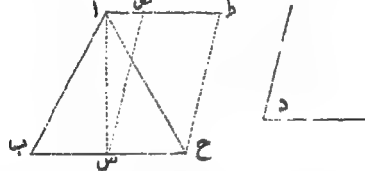
پس از این عمل دو مثلث که بر اضلاع متقابل متشکل شوند

مجموع هر دو مثلث بمساوی نصف متوازی الاضلاع خواهد بود

- (۵) خارج از سطح متوازی الاضلاع نقطه را اختیار کن
و موافق عمود کور بنا صورت دعوی را هم
(۶) متوازی الاضلاعیکه احاطه نموده باشد اجزاء متوازی الاضلاع دیگر را
تقسیم که اضلاع شکل محیط متوازی باشند با اقطار شکل داخلی
پس شکل داخلی مساوی نصف شکل خارجی خواهد بود هم
(۷) آن اشکال ذواتی که اضلاع با هم مساوی خواهند بود
که اوتار آنها و زوایای متشکله اوتار
که از تقاطع صورت گیرند متساوی باشند هم

شکل (۴۳) علی

متوازی الاضلاعی بنا که مساوی باشد با مثلث معلوم
و یک زاویه آن برابر باشد با زاویه معلومه مستقیمه الخطین



فرض کن: ا ب ج مثلث معلوم و د زاویه معلومه مستقیمه الخطین
مطلوب اینست که مساوی مثلث (ا ب ج) متوازی الاضلاعی مرتب شود
که یک زاویه آن برابر باشد با زاویه (د)

وضع شکل = (بحکم ش ۱) تنصیف کن (ب ج) را بر نقطه س
و (بحکم ش ۲) د را خط مستقیم (س ج) بر نقطه (س)

بنا از زاویه (ج س ص) را

که مساوی باشد با زاویه (د)

و (بحکم ش ۳) از نقطه (ج) خارج کن خط (ج ط) را

که متوازی باشد با خط (س ص) هم

و این نقطه را خارج کن خط را ص ط را

که متوازی باشد با س ج

لهذا (بحکم حد ۳۳) رج س ص ط متوازی الاضلاع خواهد بود

وصل کن (ا س) را

ثبوت = چونکه ر ب س مساوی (س ج) است

لهذا (بحکم ش ۳۸) مثلث ر ا ب س مساویت با مثلث (ا س ج)

زیرا که بر قواعد مساوی و (ر ب س) و (س ج)

و مابین متوازیین (ر ب ج) و (ا ط) واقع شده اند

لهذا مثلث ر ا ب ج دو چند است نسبت بمثلث (ا ب س)

لکن (بحکم ش ۴۱) متوازی الاضلاع (ص س ج ط)

دو چند است نسبت بمثلث (ا س ج)

زیرا که هر دو بر یک قاعده (س ج)

و مابین متوازیین (س ج) و (ا ط) واقع شده اند

پس (بحکم علم ۶) متوازی الاضلاع (ص س ج ط)

مساوی مثلث (ا ب ج) میباشد

و یک زاویه آن یعنی (ج س ص) مساوی و زاویه (د) تشکیل یافته است

لهذا مساوی مثلث (ا ب ج) متوازی الاضلاع (ص س ج ط)

که یک زاویه آن برابر است با زاویه (د) مرقسیم گردید و ملاحظه

مشق

- (۱) متوازی الاضلاعی بسیار که بمساحت مربع معلوم و قائم بر یک قاعده باشند و نیز یک زاویه آن قائمه باشد
- (۲) برابر متوازی الاضلاع بسیار شکل معین را که بر قاعده متوازی الاضلاع مذکور واقع باشد و بقادر بر صورتی از تمام این معین غیر متساوی است
- (۳) تطویل پس از که برابر مثلث معلوم باشد
- (۴) مساوی متوازی الاضلاع معلوم مثلث بسیار که یک زاویه آن برابر زاویه معلوم باشد
- (۵) برابر متوازی الاضلاع معلوم و بر قاعده آن بسیار مثلث قائم الزاویه را
- (۶) برابر مثلث معلوم تعیین بسیار

حد = هرگاه در قطر متوازی الاضلاع نقطه معین شود

و از آن نقطه خطوط مستقیمه که متوازی باشند با اضلاع

آن شکل خارج شوند

پس شکل موصوفه در چهار ذوا بر قاعده الاضلاع

یعنی متوازی الاضلاع منقسم خواهد شد

و از این چهار در متوازی الاضلاع را

که خط قطر از آن میکند

اشکال حوالی قطر متوازی الاضلاع نامند

و هر یکی از آن دو متوازی الاضلاع باقی را

که با اتصال آن شکل مذکور تمام میشود

مقسم متوازی الاضلاع گویند

مثلاً در شکل (۴۳) (اس ق ع) و (ق ط ج ص)

که دو متوازی الاضلاع میباشد اگر قطر واقع شده اند

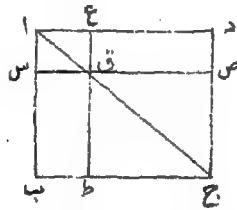
اشکال حوالی قطر نامند

و ربع ق ص د و س ب ط ق که دو متوازی الاضلاع عند
متمم متوازی الاضلاع گویند.

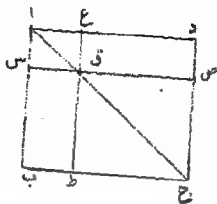
و غالباً متوازی الاضلاع را بدو حرف مفرد
که بر یک گوشه آن هر قوم باشند موسوم سازند.

شکل (۴۳) اثباتی

اشکال متوازی الاضلاع که حوالی قطر متوازی الاضلاع
واقع شوند متمم آن با هم متساوی میباشند.



فرض کن (ا ب ج د) متوازی الاضلاع و قطر آن (ا ج) است
(س ع) و (ط ص) دو متوازی الاضلاع که حوالی قطر واقع شده اند
یعنی شکالیکه (ا ج) از وسط آنها میگذرد.
(و ق ب) و (ق د) متمم آن باشند.
یعنی با اتصال آنها شکل تمام میشود.
پس متمم (ب ق) بمساوی متمم (ق د) خواهد بود.
ثبوت = چونکه (ا ب ج د) متوازی الاضلاع است



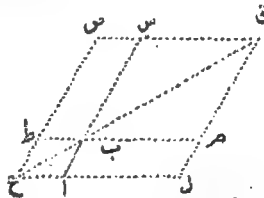
وقطران (ا ج) میباشد
 لهذا (بحکم ۳۴) مثلث (ا ب ج) مساوی مثلث (ا د ج) میباشد
 اینها چونکه (ا س ق ع) متوازی الاضلاع است
 وقطران (ا ق)
 لهذا مثلث (ا س ق) مساوی مثلث (ا ع ق) میباشد
 و همین دلیل مثلث (ق ط ج) مساوی مثلث (ق ص ج) میباشد
 و چونکه (ا س ق) مساوی (ا ع ق)
 و (ق ط ج) مساوی (ق ص ج) میباشد
 لهذا (بحکم علم ۲) مجموع مثلثین (ا س ق) و (ق ط ج)
 مساویست با مجموع مثلثین (ا ع ق) و (ق ص ج)
 و لکن در فوق ثابت شد که کل مثلث (ا ب ج)
 مساویست با کل مثلث (ا د ج)
 پس (بحکم علم ۳) متمم (ب ق) مساویست با متمم (ق د)
 (یعنی بعد از اسقاط مقسوایات)
 لهذا اشکال متوازی الاضلاع که حوالی قطر الح

مشق

- (۱) هرگاه (ق ب) و (ر د) موصول شوند پس مثلث (ا ق ب) مساوی مثلث (ا ق د) خواهد بود.
- (۲) ثابت کن متوازی الاضلاع (س د) مساویست با متوازی الاضلاع (ب ع).
- (۳) ثابت کن اشکالیکه حوالی قطر معین واقع شوند آن اشکال نیز معین باشند.
- و اشکالیکه حوالی قطر مربع واقع شوند مربع خواهند بود.
- (۴) بهادر چه صورتی متجان متوازی الاضلاع از هر حیثیت با هم منساوب باشند یعنی بر یکدیگر منطبق شوند.
- (۵) متوازی الاضلاع (ا ب ج د) در هشت متوازی الاضلاع تقسیم شده است هر یک را با اسم خود موسوم ساز و ثابت کن که با متوازی الاضلاع (ا ب ج د) منساوی الزوا یا میباشند.

شکل (۶۴) عملی

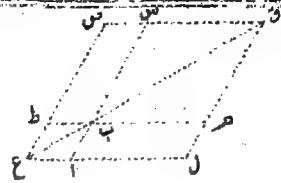
بر خط مستقیم معلوم بسامتوازی الاضلاع را که منساوب باشد با مثلث مفروض و یک زاویه آن برابر باشد با زاویه مستقیمه الخطین مفروض



فرض کن (ا ب) خط مستقیم مفروض و (ج) مثلث مفروض

و (د) زاویه مستقیمه الخطین مفروض

مطلوب اینست که بر خط مستقیم (ا ب) متوازی الاضلاع رسم شود که مساوی باشد با مثلث (ج).



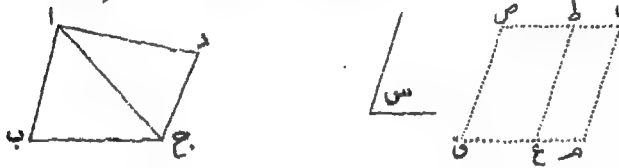
و يك زاويه آن برابر باشد با زاويه (د)
 وضع شكل (بحكم ش ۲۴) مساوي مثلث (ج)
 باز بر (اب) مدوده متوازي الاضلاع (ب س ص ط) را
 قسمي كه زاويه (س ب ط) برابر باشد با زاويه (د)
 ايضا خارج كن (ص ط) را تا نقطه (ع)
 و (بحكم ش ۳) از نقطه (ا) خارج كن خط (اع) را
 كه متوازي باشد با (ب ط) يا (س ص)
 وصل كن (ب ع) را
 چونكه بر خطوط متوازي (اع) و (س ص)
 خط (ب ع) واقع ميشود
 لهذا (بحكم ش ۲۹) زاويتين (اع ص) و (ع ص س)
 مساوي دو قائمه مي باشد
 و اما مجموع زاويتين (ب ع ص) و (ع ص س)
 كتر است از دو قائمه
 لهذا (بحكم علم ۱۲) (ب ع ب) و (ص س) پس از امتداد متوازي
 با هم وصل خواهند شد

تصور نما که بعد از خروج بر نقطه (ق) اتصال پیدا کنند
 پس (بحکم ش ۳) از نقطه (ق) خارج کن
 خط (ق ل) را که متوازی باشد با (س ا) یا (ص ع)
 ایضا خارج کن خطین (ع ا) و (ط ب) را
 قسمیکه با خط (ق ل) بر نقاط (ل) و (م) موصول شوند -
 ثبوت = لهذا (ع ل ق ص) متوازی الاضلاع
 و قطر آن (ع ق) می باشد -
 و متوازی الاضلاع (ا ط) و (م س) اشکال حوالی قطر
 و متمم آن (ل ب) و (ب ص) می باشند -
 اما متمم (ب ص) بمساوی مثلث (ج) مرتسم شده است -
 لهذا (ل ب) بمساوی مثلث (ج) می باشد -
 و چونکه (بحکم ش ۱۵) زاویتین (ط ب س) و (ا ب م) با هم متمم
 و زاویه (ط ب س) بمساوی زاویه (د) ساخته شده است
 پس (بحکم علم ۱) زاویه (ا ب م) مساویت با زاویه (د)
 لهذا بر خط مستقیم (ا ب) متوازی الاضلاع (ل ب)
 بمساوی مثلث (ج) مرتسم گردید
 که یک زاویه آن یعنی (ا ب م) برابر شد با زاویه (د)
 و مراد همین بود
 مشق =

- (۱) برخط مستقیم معلوم مستطیل بساز
که مساوی باشد با مستقیم الاضلاع معلوم
- (۲) برخط مستقیم معلوم مثلث بساز
که مساوی متوازی الاضلاع معلوم باشد
و يك زاویه آن برابر باشد با زاویه معلوم
- (۳) مستطیل بساز که مساوی باشد با دو مستطیل
که سطوح آنها غیر متساوی باشند

شکل (۴۵) علمی

متوازی الاضلاعی بساز که مساوی باشد با مستقیم الاضلاع
معلومی که زاویه آن برابر باشد با زاویه مستقیم الخطین معلوم



فرض کن راجع د مستقیم الاضلاع معلوم

و (س) زاویه مستقیم الخطین معلومه

مقصود اینست که متوازی الاضلاعی مرتسم شود

که مساوی باشد با شکل (راج د)

و يك زاویه آن نیز مساوی باشد با زاویه (س)

وضع شکل = وصل کن (ا ج) را

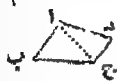
و (ب ج) ش ۴۲ مساوی مثلث (ا ج ب)

بسا متوازی الاضلاع (ص ع) را

که يك زاویه آن یعنی (ص ق ع) برابر باشد با زاویه (س)

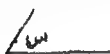
(بحکم ش ۳۳) بر خط مستقیم (ط ع)
 بساز متوازی الاضلاع (ط م) را
 که مساوی باشد با ضلعت (ا د ج)
 و یک زاویه آن یعنی (ط ع م) برابر باشد با زاویه (س)
 لهذا شکل (ص ق م ل) متوازی الاضلاع مطلوب خواهد بود
 ثبوت = چونکه هر یکی از زاویاتین (ص ق ع) و (ط ع م) =
 مساوی زاویه (س) ساخته شده است
 لهذا (بحکم علم ۱) زاویه (ص ق ع) برابر است با زاویه (ط ع م)
 بر هر یکی از این متساویات بیفزای زاویه (ق ع ط) را
 پس (بحکم علم ۲) مجموع زاویاتین (ص ق ع) و (ق ع ط)
 مساویست با مجموع زاویاتین (ق ع ط) و (ط ع م)
 ایضا (بحکم ش ۳۹) چونکه خط (ص ق) و (ط ع) با هم متوازیند
 و (ق ع) بر آنها واقع میشود
 لهذا زاویاتین (ص ق ع) و (ق ع ط) بمساوی دو قائمه میباشد
 و كذلك زاویاتین (ق ع ط) و (ط ع م) بمساوی دو قائمه اند
 بنابراین (بحکم ش ۱۴) خط (ق ع) و (ع م) بیک خط مستقیم
 واقع میباشند
 ایضا چونکه بر خطوط متوازی (ق م) و (ص ط) خط مستقیم
 (ع ط) واقع میشود

لهذا (بحکم ش ۲۹) زوایای متبادله (مع ط) و (ع ط ص) با هم
متساوینند.



بر هر یکی از این متساویات بیقراری زاویه (ع ط ل) را

لهذا زاویتین (مع ط) و (ع ط ل) بمساوی زاویتین (ع ط ص)
و (ع ط ل) میباشند.



لکن (بحکم ش ۲۹) چونکه (ع م) و (ط ل) با هم متوازنند و (ع ط)
بر آنها واقع میشود



لهذا زاویتین (مع ط) و (ع ط ل) بمساوی دو قائمه میباشند
و كذلك زاویتین (ع ط ص) و (ع ط ل) نیز بمساوی دو قائمه باشند
پس (بحکم ش ۱۴) (ص ط) و (ط ل) در یک خط مستقیم میباشند
و چونکه از خطین (ق ص) و (م ل) هر یکی متوازیست با (ع ط)
لهذا (بحکم ش ۳) (ق ص) متوازی (م ل) است.

اما (ص ل) با خط (ق م) متوازی مرتقم شده است
لهذا (بحکم حد ۳۳) شکل (ق ص ل م) متوازی الاضلاع میباشند
و چونکه متوازی الاضلاع (ع ص) بمساوی مثلث (ا ب ج) مرتقم شده
و نیز متوازی الاضلاع (م ط) بمساوی مثلث (ا د ج) تشکیل یافته است
لهذا (بحکم علم ۲) تمام مستقیمه الاضلاع (ا ب ج د)
برابر است با تمام متوازی الاضلاع (ق ص ل م)
که یک زاویه آن یعنی (ص ق م) بمساوی زاویه (س) میباشند.

و مراد همین بوده است

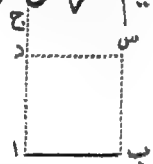
(موافق همین سلسله استدلال که مرقوم افتاد میتوان متواتر الاضلاع ساخت که مسا باشد با مستقیمه الاضلاعی که زیاد از پنجاه ضلع داشته شد

مشق

- (۱) بر خط مستقیم معلوم مستطیل بساز که مسا باشد با مستقیمه الاضلاع معلوم
- (۲) سطح مستطیل و یک ضلع آن معلوم است ضلع دیگر را پیدا کن
- (۳) بساوی مجموع دو مستقیمه الاضلاع یا بساوی فرق آن متوازی الاضلاعی بساز
- (۴) بر دو خط مستقیم متقاطع بساوی یک مربع و یک معین و اگر هر دو با هم مسا باشند

شکل (۴۶) علی

بر خط مستقیم مفروض مربع بساز



فرض کن (اب) خط مستقیم مفروض

مطلوب اینست که بر (اب) شکل مربع مرتب شود

وضع شکل = (بحکم ش ۱۱) از نقطه (ا) خارج کن خط (اج)

که همی که با (اب) زاویه قائمه پیدا کند

و (بحکم ش ۳) اد و ا برابر (اب) معین کن

از نقطه (د) خارج کن خط (دس) را که متواتر باشد با (اب)

و از نقطه (ب) خارج کن (ب س) را که متواتر باشد با (اد)

پس این شکل (اب س د) مربع مطلوب خواهد بود



ثبوت = زیرا که (اب س د) متوازی الاضلاع مرتب شده است
 لهذا (بجکه ش ۳۴) (اب) بمساوی (دس) و (اد) بمساوی (ب س)
 میباشد.

ولکن (اب) برابر (اد) خارج شده است
 لهذا (بجکه علم ۱) هر چهار خط مستقیم
 یعنی (ب ا) و (اد) و (دس) و (س ب) با هم متساوینند
 و شکل (اد س ب) متوازی الاضلاع میباشد
 همین تفصیل تمام زوایای آن قائمه اند

زیرا که خط مستقیم (اد) بر خطوط متوازی (اب) و (دس) واقع شده
 و (بجکه ش ۲۹) مجموع زاویاتین (ب ا د) و (اد س) بمساوی دو قائمه
 میباشد

ولکن زاویه (ب ا د) قائمه مرتب شده است
 لهذا زاویه (اد س) هم قائمه میباشد
 و چونکه (بجکه ش ۳۶) زوایای متقابل هر متوازی الاضلاع
 با هم متساو میباشند
 لهذا (بجکه علم ۱) زاویاتین (اب س) و (ب د س) که مقابل واقع شده اند

مساوی و قائمه میباشند

شکل
۱۱۹

پس شکل (اب س د) قائم الزوایا میباشد

و اما در فوق ثابت شد که شکل مذکور متساوی الاضلاع میباشد

لهذا بحکم حد (۲) شکل (اب س د) مربع میباشد که بر خط مستقیم (اب)

از این جهت ظاهر میشود که متوازی الاضلاعی که یک زاویه آن

قائم باشد باقی زوایای آن بالصح قائم خواهند بود

ایضا بر خطوط متساویه مربعات متساویه تشکیل یابد =

و مربعات متساویه را اضلاع متساویه میباشند

مشق

(۱) بر قطعه معلوم مربع بساز

(۲) بر اضلاع مربع یا بر اضلاع عمود آن هرگاه از زوایای مربع بر اضلاع متساوی نقاط معین نموده با هم وصل شوند

مربع دیگر بیرون یا داخل مربع معلوم متشکل خواهد شد

ایضا بخش منظم و مسدس منظم حکوم همین حکم است

(۳) یک مربع را در پنج قسمت تقسیم کن

(۴) قسمتی که از آن چهار مثلث قائم الزویه تشکیل یابد و قسمت پنجم مربع باشد خطی که از نقطه وسط ضلع متوازی الاضلاع تا نقطه وسط ضلع دیگر

کرد پهلوی آن واقع است کشیده شود تعیین شکل خواهد نمود

یعنی یک مثلث را قطع خواهد نمود

(۵) مربع را تقسیم کن قسمتی که یک نیمه آن مربع باشد

(۶) مربع را در پنج قسمت متساوی تقسیم کن

قسمتی که یک قسمت آن مربع باشد

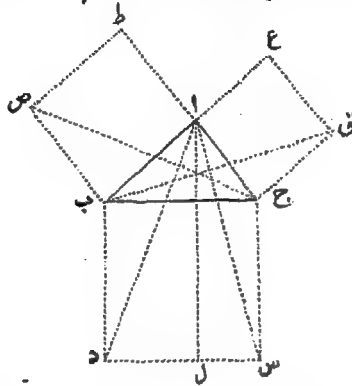
و هر یک از باقی چهار شکل متعریف

(۷) اشکال بنسبت مذکوره را بساز به جهت مثلث قائم الزویه که عمود آن دو چند باشد نسبت بقاعده

شکل (۴۷) اثباتی

مربع مرتبه بروتر مثلث قائم الزویه مساوی میباشد

با محسوسه دو مربع که بر باقی ضلعین آن مرتقم میشوند



فرض کن (ا ب ج) مثلث قائم الزاویه که یک زاویه آن یعنی (ب ا ج) قائمه
پس مربعی که بر (ب ج) ساخته شود مساوی خواهد بود با دو مربع که ساخته
شوند بر (ب ا) و (ا ج)

وضع شکل = (ب ج ک ش ۶ ع) بساز بر (ب ج) مربع (ب ج ح) و بر (ب ا) مربع (ط ب و) و بر (ا ج) مربع (ع ج ر) و
(ب ج ک ش ۳ ا) از نقطه (ا) خارج کن خط (ا ل) را که متوازی باشد
با (ب د) یا (ح س)

وصل کن (ا د) و (ص ج) را

ثبوت = چونکه (موجب مفروض) زاویه (ب ا ج) قائمه میباشد
پس (ب ج ک ش ۳) زاویه (ب ا ط) نیز قائمه میباشد
ایضا چونکه خطوط مستقیم (ا ج) و (ا ط) که از دو سمت متقابل امتداد
و در خط (ا ب) بر نقطه (ا) وصل میشوند

و در دو جانب آن دو زاویه متصل بمساوی و قائمه پیدا کنند
 لهذا (بحکم شریع ۱۴) (ج ا) و (ا ط) در یک خط مستقیم میباشد
 و همین دلیل ثابت است که (اب) و (اع) نیز در یک خط مستقیم واقع
 و زاویه بین (د ب ج) و (ص ب ا) با هم متساوینند
 زیرا که هر یکی از آنها قائمه میباشد
 نیز برای برهبری از این متساویات زاویه (اب ج) را
 لهذا (بحکم علم ۲) کل زاویه (د ب ا) برابر است با کل زاویه (ص ب ج)
 و چون ضلع (اب) بمساوی ضلع (ب ص) است و ضلع (ب د)
 بمساوی (ب ج) و نیز زاویه (د ب ا) برابر است با زاویه (ص ب ج)
 پس (بحکم شریع) مثلث (ا ب د) مساویست با مثلث (ص ب ج)
 لهذا (بحکم شریع) متوازی الاضلاع (ب ل) دو چند است نسبت
 بمثلث (ا ب د)
 زیرا که هر دو در یک قاعده (ب ج) مابین متوازیین (ب د) و (ا ل) واقع
 میباشد
 ایضا مربع (ط ب) دو چند است نسبت بمثلث (ص ب ج)
 زیرا که هر دو در یک قاعده (ص ب) مابین متوازیین (ص ب) و
 (ط ج) واقع میباشد
 لهذا (بحکم علم ۶) مضاعف متساویات با هم متساوی میباشد

پس متوازی الاضلاع (ب ل) برابر است با مربع (ط ب)
 علم هذا القیاس هرگاه (ا س) و (ب ق) موصول شوند ثابت توان نمود
 که متوازی الاضلاع (ج ل) مساویت با مربع (ج ع)
 بنابراین (بحکم علم ۲) کل مربع (ب د س ج)
 مساوی میباشد با د و مربع (ط ب) و (ع ج)
 لهذا ثابت شد که مربع هر قسم بر ضلع (ب ج)
 که وتر مثلث معلوم میباشد مساویت با د و مربع
 باقی ضلعین و مراد همین بوده است

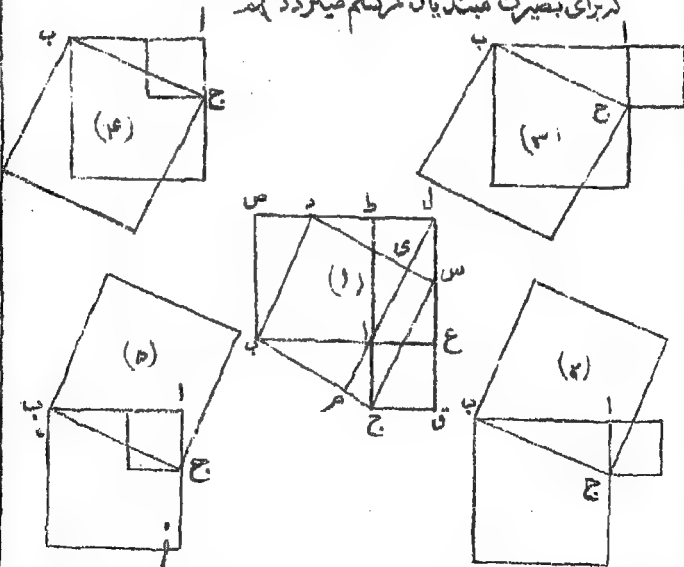
مشق =

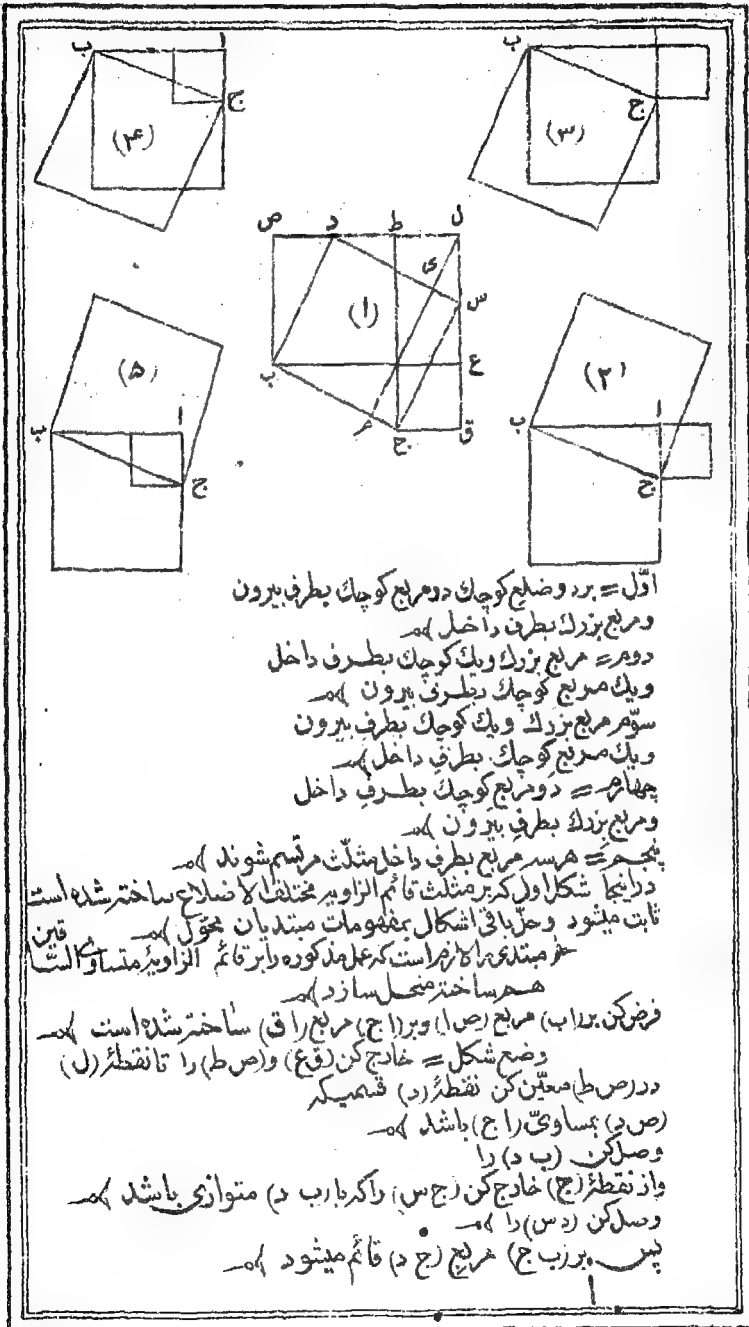
- (۱) ثابت کن در این شکل =
 (اول) = هرگاه (ب ط) و (ج ع) موصول شوند خطین واصل با هم متوازی خواهند بود
 (دوم) = نقاط (ص اق) در یک خط مستقیم واقع شوند
 (سوم) = (ص ج) و (ا د) ب یکدیگر زاویه قائمه تشکیل نمایند
 (چهارم) = هرگاه (ط ع) و (ق س) و (ص د) با هم وصل شوند
 از هرچیت مثلث (ط ا ع) مثلثی معلوم خواهد بود
- (۲) بر هر مثلث (ا ب ج) که بر ضلعین (ا ب) و (ا ج) مربعیات (ا ب ص ط) و (ا ج ق ع) بر قسم شوند
 و این مربعیات بجانب مثلث واقع شوند یا بجانب بیرون از مثلث
 در هر دو صورت خطوط مستقیم (ب ع) و (ج ط) با هم مساوی خواهند بود
- (۳) در هر مثلث (ا ب ج) که بر اضلاع آن مثلثات متساوی الاضلاع (ب ج م ر) و (ج ای) و (ا د) بر قسم شوند تمام قسمت داخل مثلث معلوم باشند یا قسمت خارج آن
 در هر دو صورت (ا م) و (ب ی) و (ج ۵) با هم مساوی خواهند بود
- (۴) بر قطر هر یکی چون مربع دیگر ساخته شود و دو چند خواهد بود نسبت به مربع اول
- (۵) راجع به مثلث متساوی الاضلاع است
 و از نقطه (ا) عبور (ا د) بر (ب ج) خارج شده است
 ثابت کن مربع (ا د) سه چند است نسبت به مربع (ب د)
- (۶) مربعی که از هر مساوی دو مربع باشد

- (۷) از نقطه (ا) که رأس مثلث (ا ب ج) میباشد
عمود (ا د) بر قاعده آن قائم شده است
ثابت کن فرق مربعات (ا ب) و (ا ج) مساوی خواهد بود
با فرق مربعات (ب د) و (ج د) ^{مسئله}
(۸) هرگاه در مثلث (ا ب ج) نقطه مثلاً (د) معین شود
و از آن نقطه عمود (د س) و (د ط) بر اضلاع
(ب ج) و (ج ا) و (ا ب) قایم شوند
ثابت کن که مجموع مربعات حصص (ا ط) و (ب س) و (ج ص) ^{مسئله}
برابر است با مجموع مربعات حصص (ا ص) و (ج س) و (ب ط)

تفہیم

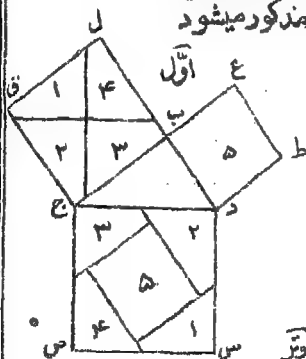
- (۱) اقلیدس در این شکل همان صورت را ثابت نموده است که هر سه مربع بیست و یک
شکل مرتب میشوند
و لکن محقق طوسی علیه الرحمہ در تحریری نوید که موافق جهات اضلاع مثلث
ممکن است از تمام مربعات و دوران هشت صورت ممکن
زیرا که هر ضلعی دو جهت دارد پس دو ضلع را چهار جهت باشد
و ضلع سوم را نیز دو جهت است
پس جهات و اربعه ضلعین اول را با هم یکی آرد و جهت ضلع سوم توان تشکیل
بنابر این هشت جهت میباشد ^{مسئله}
اما اشکالی که از این عمل صورت بنابر این پنج شکل متصور است
که برای بصیرت مبتدیان مرتب میگرد ^{مسئله}





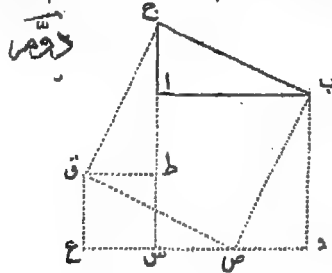
از نقطه (ا) خارج کن زل می را که متوازی باشد با (سج) یا (دب) شد
 ثبوت = لهذا در یک شهر ۳ مربع (ص) بمساوی متوازی الاضلاع (زل ب) می باشد
 زیرا که هر دو بر یک قاعده (اب) واقعند و چون که در مثلثین (اب می) و (ل دی) ضلع (ب) برابر (دل) و ضلع (ب می) برابر (دی) می باشد
 و نیز زاویه (ب می) بمساوی زاویه (دی ل) است
 لهذا قواعد (امی و لی) با هم برابر و مثلثین نیز با هم متساوی می باشند
 بنا بر این متوازی الاضلاع (ل ب) که بمساوی (ص) ثابت شده است برابر است با متوازی الاضلاع (د می)
 یعنی (د می و ص) با هم متساوی می باشند و اتمام تطبیل (س می) باندک قیاس ثابت شود که بمساوی (ل ج) است
 و در یک شهر ۳ (ل ج) بمساوی (اق) است زیرا که هر دو بر یک قاعده (اج) واقعند

(۲) در علم هندسه این شکل کثیر النفع (یعنی ۱۴) معروف و موسوم است بشکل مرغ
 گویند و چنان حکم فیثاغورس (صوری است) که اقسامهای عجیب و غریب حکایات ساخته اند غریب تر آنیکه گویند
 زمانیکه برادشمار این شکل و قوف حاصل شده بود جهت شکر از این موهبت حیوانات را برای قربانی بمعبده خود هدیه فرستادند
 هر جهت استاید متاخرین طرف متعدده برای اثبات این معنی نیکخته
 و انواع اشکال ساخته اند که از آن نشانی خاطر مبتدیان میشود
 باین معنی که مربع و تر هر مثلث قائم الزاویه برابر است
 با دو مربع که بر بانی ضلعین آن ساخته شوند
 فحمله آن اشکال این شکل که نتیجه افکار هندسین است
 برای بصیرت طالب العلم در اینجا ثبت و مذکور میشود



مثلاً (ب ج د) مثلث قائم الزاویه است و بر وتر آن مربع (ب ج د س ص) و بر ضلعین آن مربع (ب د ط خ) و (ب ج ق ل) ساخته شده اند

مرکز مربع (ب ج ق ل) را پیدا کن
 (در نقطه کرده و قطر مربع تقاطع نمایند مرکز مربع می باشد و این دو قطر
 در شکل مذکور مرسم شده اند)
 و بر این مرکز خارج کن خطی که متوازی باشد با (ا ج د)
 و خط دیگر بر آن عمود کن که آنهم از مرکز بگذرد
 پس این مربع در چهار ذو اربعه الاضلاع منقسم خواهد شد
 که از هر حیثیت با هم متساوی خواهند بود
 و هر ضلعی از اضلاع مربع (ب ج د س) از نقاط وسط
 خارج کن خطوط مستقیم را که متوازی باشند با (ب ج و ب د)
 و این صورت بر حصص ۴ ۳ ۲ ۱ قرار ده با هم منطبق خواهند شد



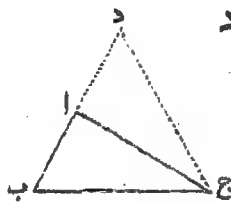
فرض کن (ا ب ج) مثلث قائم الزاویه و (ا) زاویه قائمه
 پس مربع مرسم بر وتر (ب) مساوی خواهد بود با دو مربع (ب ا و ا ج)
 وضع شکل (۱) بحکم ۶ (ب ساز بر (ا ب) مربع (ا ب د س) را
 و (بحکم ۳) قطع کن از (د س) و (د س) مقدار (د ص) و (ر س ط) را
 که هر یکی مساوی باشد با (ا ج)
 پس (بحکم ۶) بساز بر (ر س ط) مربع (ر س ط ق ع) را
 پس (بحکم ۳) (ع س) و (ر س ط) در یک خط مستقیم خواهند بود
 و صل کن (ا ج ق) و (ق ص) و (ر ص ب) را
 لهذا شکل (ب ج ق ص ب) مربع می باشد
 ثبوت = (ج ا) مساویت با (ط س)
 بیفزای بر هر یکی (ا ط) را
 پس (ج ط) مساویت با (ا س)
 و گذر از خط (د ص) مساویت با (ر س د)
 لهذا اربعه مستقیم یعنی (ب ا) و (ر ط) و (ر ص) و (ب د) با هم متساویند
 و در مثلثین (ب ا ج) و (ر ط ق) خط (ب ا) مساویت با (ر ط)
 و (ا ج) مساویت با (ر ق)
 انصافا زاویه متشکله یعنی (ب ا ج) مساویت با زاویه (ر ط ق)
 و هر یک قائم می باشد

لهذا (بجای ش) مثلثین (ب ا ج) و (ج ط ق) از هر حیثیت متساویند
 و کلاً چهار مثلث یعنی (ب ا ج) و (ج ط ق) و (ب د ص) و (ب ا ه) متساویند
 لهذا خطوط مستقیمه (ب ج) و (ج ق) و (ق ص) و (ص ب) با هم متساوی میباشند
 یعنی شکل (ج ق ص ب) مربع میباشند
 و نیز (ب ج و ج ق) زاویه (ب ا ج) مساویت با زاویه (ص ب د) و
 بیفزای هر یکی زاویه (ا ب ص) را
 پس زاویه (ج ب ص) مساویت با زاویه (ا ب د)
 لهذا زاویه (ج ب ص) قائمه میباشند
 بنابراین (بجای د) شکل (ج ق ص ب) مربع است
 کبر و تر (ب ج) مرتبم گردید
 و شکل (ط ق ع ص) مساویت با مربع ضلع (ا ج)
 پس شکل (ج ق ص ب) مرتبم گردیده است بر شکل غیر منتظم (ا ب ص ق ط)
 و مثلثین (ب ا ج) و (ج ط ق)
 لهذا مربع (ج ق ص ب) مساویت
 با مثلثین (ب ا ج) و (ج ط ق) مع شکل غیر منتظم مذکور
 و لکن این اشکال تلاطمه مذکور شد مشتقند بر مربعات (ق ع س ط) و (ا ب د ج)
 لهذا مربع (ج ق ص ب) مساویت با دو مربع (ق ع س ط) و (ا ب د ج)
 یعنی مربع مرتبم بر (ج) مساویت با دو مربع ضلعین (ج ا) و (ا ب)

شکل (۴۸) اثباتی

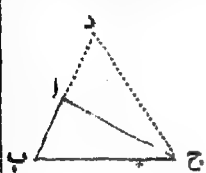
هرگاه مربع مرتبم بر يك ضلع مثلث مساو باشد با آن مربع
 که بر باقی ضلعین آن مرتبم شوند پس زاویه متشکله این ضلعین قائم

خواهد بود



فرض کن در مثلث (ا ب ج) مربع مرتبم بر ضلع (ب ج)
 مساویت با مربع مرتبم بر ضلع (ا ب) و (ا ج)
 پس زاویه (ب ا ج) قائمه خواهد بود

وضع شکل = (بجمله ۱۱) از نقطه (ا) خارج کن خط (اد) را



که با (اج) زاویه قائمه پیدا کند

و (بجمله ۳) (اد) را برابر (ب ا) معین کن

و وصل کن (دج) را

ثبوت = چونکه (دا) مساویت با (ب ا)

پس مربع (دا) بمساوی مربع (ب ا) میباشد

از این متساویات بر هر یکی بیفزای مربع (اج) را

پس (بجمله علم ۲) مربع (دا) و (اج) مساوی باشند با مربع (ب ا) (اج)

زیرا که زاویه (داج) قائمه مرشم شده است

لذا (بجمله ۴) مجموعه مربع (دا) و (اج) بمساوی

مربع (دج) میباشد

ولکن (موجب مفروض) مربع (بج) مساویت با مربع (ب ا)

(ب ا) و (اج)

لذا مربع (دج) بمساوی مربع (بج) میباشد

بنابراین ضلع (دج) برابر است با ضلع (بج)

و چونکه ضلع (دا) برابر ضلع (ب ا) معین شده است

و (اج) مشترک است در مثلثین (داج) و (ب ا ج)

لذا ضلعین (دا) و (اج) مساویند با ضلعین (ب ا)

و (اج) متوافق با فظائر خود

واما در فوق ثابت شد که قاعد (دج) مساویت با قاعد ب
 لهذا (بحکم ش) زاویه (داج) مساوی شد با زاویه (باج)
 ولکن زاویه (داج) قائمه میباشد
 پس زاویه (باج) نیز قائمه است
 لهذا مربع مرتبه بزرگ ضلع مثلث الح
 (این شکل عکس شکل ۲ میباشد)
 (اقلیدس عکس اشکال را برتها خلف ثابت کرده)
 (ولکن عکس این شکل ثبوت عینی را نگارده است)

تفهیم =

(۱) اضلاع مثلث بحسب اعداد هرگاه سه و چهار و پنج باشند

زاویه میان ضلع سه و چهار قاعد خواهد بود

مثلا $۱۶ = ۹ + ۵ = ۵$ یعنی مجموع سه در سه که نه باشد و چهار در چهار که شانزده باشد و بیست و پنج
 و ضلع سوم که پنج است آنهم پنج در پنج بیست و پنج میباشد

(بدانکه محاسبین در علم حساب جهت اختصار علامتی قرار داده اند
 مثلا این (م) علامت یعنی عدد یزه دو که فوق علامه جلی می خوانند
 مراد اینست که عدد جلی که مختار واقع شده است یک بار در نفس خود ضرب شود)

مثلا سه در سه و چهار در چهار و پنج در پنج

و این (+) علامت یعنی خط عرضی که خط دیگر بر آن عدد تقاطع نموده نشان

جمع است یعنی عدد ماقبل و ما بعد جمع شود

و این (=) یعنی دو خط عرضی که متوازیند نشان مساوات است یعنی عدد یا اعداد

ما قبل مساوی عدد یا اعداد ما بعد است

مثلا سه مضروب در نفس خود مع چهار مضروب در نفس خود مساوی شانزده

مع که مساویت با پنج مضروب در نفس خود

متقارن قواعدی چند برای دریافت نمودن علامه صحیح

که از آن اعداد صحیح اضلاع مثلث قائم الزامی تغییر نباشد بیان نموده اند

بعضی از قواعد را اینجا ملاحظه فرمائید

قاعد فیثاغورس

(۱) هر عدد طاق را که میخواهی برای يك ضلع مثلث فرض کن
 (۲) از مربع عدد مفروض عدد يك را تفریق نما و نصف باقی را
 برای ضلع دوم اختیار کن
 (۳) بر مربع عدد مفروض عدد يك را اضافه کن و نصف مجموع را از اختیار کن
 که ضلع سوم نیز برابر آنست
 یعنی ضلاع مثلث که این قسم تحصیل شود تغییر نکند مثلث قائم الزاویه را
 مثلا عدد پنج را فرض کن که يك ضلع میباشد
 پس $\frac{1}{2}(1-25) = 12$ ایضا $\frac{1}{2}(1+25) = 13$
 لهذا عدد ۵ و ۱۲ و ۱۳ عدد مطلوب است
 زیرا که $5^2 + 12^2 = 13^2$ میباشد
 این $\frac{1}{2}$ علامت که عددی فوق خط عرضی و عددی تحت آن مرتب است
 نشان تنصیف است یعنی يك قسمت از مقدار يكه تقسیم در دو قسمت
 شده است

و این (۲-۱) علامت دلالت کند بر اینکه تغییر جمله اعداد دیگر میباشد
 قوسین محذوف است محکوم است بعلامه ماقبل و مابعد خود
 مثلا در تفریق اول مراد اینست که نصف جمله قوسیه مساویست با
 دوازده
 و این (۱-) علامت یعنی خط ریزه عرضی نشان تفریق است یعنی عدد
 یا اینکه عدد کوچک از عدد بزرگ تفریق شود
 چنانچه در فتره اول از عدد ۲۵ که يك تفریق شود نصف باقی
 دوازده باشد

قاعده افلاکون

(۱) هر عدد جفت را که میخواهی برای يك ضلع فرض کن
 (۲) از مربع نصف عدد مفروض عدد يك را تفریق کن
 (۳) بر مربع نصف عدد مفروض عدد يك را اضافه کن
 پس عدد مفروض و اعداد دیگر این قسم حاصل شود
 تغییر نماید مثلث قائم الزاویه را
 مثلا عدد شش را برای يك ضلع اختیار کن
 پس $\frac{1}{2} - 1 = 8$
 و $\frac{1}{2} + 1 = 10$
 لهذا عدد ۶ و ۸ و ۱۰ عدد مطلوب است
 زیرا که $6^2 + 8^2 = 10^2$ میباشد

قاعده متداوله

- (۱) هر قسم دو عدد و اگر میخواهی فرض کن که از این جنس نباشند
و مجموع مربع هر دو را دریافت کن که برایت ضلع خواهد بود
(۲) فرق مربعات مذکور را پیدا کن که ضلع دیگر خواهد بود
(۳) حاصل ضرب دو عدد مفروضه را مضاعف کن که ضلع سوم است
مثلاً عدد ۴ و ۵ را فرض کن
پس $۴ + ۵ = ۹$
و $۵ - ۴ = ۱$
و $۴ \times ۵ = ۲۰$
لذا اضلاع مثلث مطلوب ۹ و ۴ و ۱ میباشد
این (۳) علامت یعنی دو خط متقاطع حائلی نشان ضرب است
یعنی مقدار ماقبل در مقدار ما بعد ضرب شود حاصل ضرب
باز در مقدار ما بعد خود ضرب شود
مثلاً ۴ ضرب در ۵ حاصل ۲۰ و باز ضرب در ۴ حاصل ۸۰ میباشد

در اینجا توضیح علامت حسابیه زیاده از این لازم نیست
و اینهم که ذکر شد محض برای تشویق مبتدیان بسوی علم حساب مرفوع افتاد

اسلوب تجلیلی ترکیبی

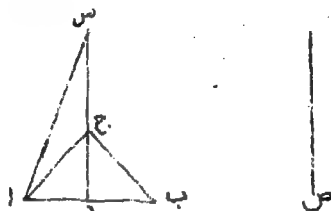
مراد اینست که چون خواسته باشیم خواص شکلی را دریافت نماییم
طریقه کار برای این عمل بکار رود انرا اسلوب تجلیلی گویند
و این نیست که برای حصول مدعای شکی در ابتدا ثابت فرض کنیم
و در آخر برای تسلسل متدرجاً نتیجه را استدلال نماییم
و می بینیم که آن نتیجه مطابق است باینکه از آن نتایج که تاکنون تیرا همین ثابت شده اند
باید نیست

اگر هست پس تصدیق دعوی ثابت و الا باطل است
و اینها هرگاه موافق آن نتایج که تحقیقات خود ما ثابت شده اند
خواسته باشیم شکلی بنا کنیم
پس این عمل را اسلوب ترکیبی گویند
و این نیست که در ابتدا شکی را ثابت نتایج مشتبه را بکار ببریم
و از این عمل شکلی نوی مرئوس خواهد گردید

بدان چونکه حل این مقاصد موقوف بهت برهان و کثرت مشق مبتدی
لذا در این باب زیاده از این هدايات لازم نباشد

اسلوب تجلیلی

مثلت مثلث است که بقا علیه معلوم باشد
و نیز مجموع عرض ساق مع آن عمود که از راس بر قاعده خارج شود معلوم باشد



فرض کن (ا ب) قاعده معلوم و (ص) مجموع عرض ساق
مع آن عمود که از راس بر قاعده خارج شود می باشد
برای حصول مدعا تصدیق کن که (ا ب ج) مثلث مطلوب است
از (ج) خارج کن بر (ا ب) عمود (ج د) را
پس (ا ب) بر نقطه (د) تنصیف خواهد شد
و هرگاه (د ج) قاعده (س) خارج شود
قتضای (ج س) مساوی (ا ج) باشد و (ا س) را وصل نمائیم
پس (ب ج) زاویه (ج س) مساوی زاویه (ج س ا) خواهد بود
اکنون ملاحظه کن پیش از آنکه مقام راجع معلوم باشد
خط مستقیم (د س) را (ا س) را توان خارج نمود
لذا از این عمل حاصل می شود مثلث معلوم شد
یعنی هرگاه بخواهیم موافق سوال واقع نمیشد تصدیق باطل بود
حال همین مطلب را با سابو ترکیبی بیان کنیم

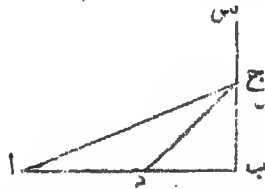
اسلوب ترکیبی

تنصیف کن (ا ب) بر نقطه (د)
از نقطه (د) خارج کن عمود (د س) را
(د س) را برابر (ص) معین کن
وصل کن (ا س) را
در (ا س) بر نقطه (ا) بساز زاویه (س ا ج) را که مساوی (ا س د) باشد
وصل کن (ج ب) را
پس (ا ب ج) مثلث مطلوب می باشد
زیرا که (ب ج) زاویه (ج س) مساوی زاویه (ج س ا) است
یعنی (ج س) مساوی (ج س) است
چونکه زاویه (س ا ج) مساوی (ا س ج) می باشد
لذا (ا ج) مساوی (ا ج)

بفرض ای بریکو از این متساویات (ج د) را
پس مجموعه (ا ج) و (ج د) مساویت با مجموعه (س ج) و (ج د)
که مساویت با (س د)
یعنی مجموعه (ا ج) و (ج د) بمساوی (س) میباشد که

ایضاً اسلوب ترکیبی

خط مستقیم معلوم را در دو قسمت چنان تقسیم کن که مربع یک
قسمت دوچند باشد نسبت به مربع قسمت ثانی که



فرض کن (اب) خط مستقیم معلوم است
برای حصول مدعا قبول کن در (اب) قسمتی که مطلوبت در نقطه (د) شده
یعنی مربع (اد) دوچند است نسبت به مربع (د ب)
اکنون بخاطر پیاور کرد و مثلث قائمه الزاویه متساوی الساقین
مربع وتر دوچند است نسبت به مربع ضلع آن
پس از این ظاهر میشود که بر (اب) عمود (ب ج) قائم کنیم
قسمتی که (ب ج) بمساوی (د ب) باشد و (د ج) را وصل نمائیم
پس (ب ج د) مربع (د ج) دوچند است نسبت به مربع (د ب)
پس (ب ج د) بمساوی (د) خواهد بود که هرگاه نباشد تصدیق دعوی باطل است
هرگاه (ا ج) را موصول سازیم معلوم شود
که زاویه (ا ج) مساویت با زاویه (د ج) است
پس (ب ج د) زاویه خارجی (ج د ب) دوچند است نسبت به (د ج)
لکن زاویه (ج د ب) نصف قائم میباشد
پس زاویه (ا ج) ربع قائم است که

ایضاً اسلوب ترکیبی

بر (اب) از نقطه (ب) خارج کن عمود (ب س) را
و از (ا) خارج کن (ا ج) را
قسمتی که زاویه (ب ا ج) بمساوی ربع قائم باشد که

برفقطه تقاطع (ا ج) و (ب ج) بساز زاویه (ا ج د) را
 که برابر باشد با زاویه (ا د ج)
 لهذا تقسیم ا ب چنانکه منظور است برفقطه د خواهد بود
 زیرا که زاویه (ا ج د) مساویست با زاویه (د ا ج)
 لهذا (بحکم ش ۵ د ا) برابر است با (د ج)
 اینها چونکه (بحکم ش ۳۲) زاویه (ب د ج) مساویست
 با زاویه (د ا ج) و (ا ج د)
 لهذا (ب د ج) نصف قائمه میباشد
 و چونکه زاویه (ب د ج) قائمه میباشد
 پس (بحکم ش ۳۲) (ب ج د) هم نصف قائمه است
 بنابراین زاویه (ب د ج) برابر است با زاویه (ب ج د)
 لهذا (ب د ج) مساویست با (ب ج د)
 از این میان واضح شود که مربع مرتفع بر (د ج)
 (بحکم ش ۴۲) دو چند است نسبت بمربع (د ب)

یعنی مربع مرتفع بر (ا د) دو چند است نسبت بمربع (د ب)

مساویات متشکله و مثلثات

مشق =

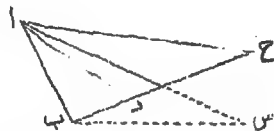
- (۱) هرگاه در مثلثی از رأس بر قاعده آن عمود خارج شود و تنصیف قاعده نماید
 آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
- (۲) هرگاه خط منصف زاویه رأس مثلث بر قاعده عمود باشد
 آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
- (۳) هرگاه خط منصف زاویه رأس مثلث قاعده را نیز تنصیف نماید
 آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
- (۴) هرگاه از اطراف قاعده مثلث یک زوج خطوط خارج شده باشد
 و با امتداد مثلث دوای مساوی تشکیل نماید و با هم برابر باشند
 پس آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
- (۵) هرگاه در مثلثی از اطراف قاعده عماد بر اضلاع خارج شده
 با هم متساوی باشند
 آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
- (۶) بر یک قاعده (ا ب) و بر جهات مخالف دو مثلث (ا ب ج) و (ا ب د)
 چنان واقع شده اند که (ا ج) برابر است با (ا د) و (ب ج) با (ب د)

- پس ثابت کن خطی که واصل (ج د) است بر (ا ب) عمود خواهد بود (۷)
- هرگاه از اطراف قاعه مثلث متساوی الساقین بر اضلاع متقابل عماد خارج شوند پس خطی که از نقطه تقاطع عماد بر اس مثلث واصل شود زاویه راس را تنصیف خواهد نمود (۸)
- (ا ب ج) مثلثی است که زاویه راس (ا ب ج) از خط (ا د) تنصیف شده است و بر (ا د) از نقطه (ب) عمود (ب س) خارج شده است و چنان متساوی شده که (ب ا ج) یا (ا ج) مدو در نقطه (ص) موصول باشد ثابت کن (ب س) بمساوی (س ص) است (۹)
- (ا ب ج د) دو اربعه الاضلاعی است که (ا ب) برابر است با (ا د) و (ب ج) با (د ج) مساوی باشد و شکل را ثابت کن
- که خط (ا ج) تنصیف میکند آن را و یا را که با آنها موصول شده است بر خلاف خط (ف د) که تنصیف نکند (۱۰)
- در دو اربعه الاضلاع (ا ب ج د) اضلاع مقابل یعنی (ا د) و (ب ج) متساوی و او تار یعنی (ا ج) و (ب د) هم مساوی پس هرگاه (ا ج) و (ب د) در نقطه (س) تقاطع نمایند ثابت کن که مثلثین (ا س ب) و (د س ج) متساوی الساقین میباشند (۱۱)
- در مثلثی هرگاه مجموع دو زاویه مساوی باشد با زاویه سوم نضع پس ضلعی که اعظم است دو چند خواهد بود نسبت بخطیکه از نقطه وسط آن تا زاویه مقابل خارج شود (۱۲)
- در دو مثلث قائم الزاویه که او تار آن با هم مساوی باشند و نیز یک ضلع یک مثلث مساوی باشد با یک ضلع مثلث دیگر ثابت کن که سطوح هر دو با هم مساویند (۱۳)

غیر مساویات

- (۱۴) در مثلث (ا ب ج) هرگاه (ا ج) اطول نباشد نسبت به (ا ب) ثابت کن خطی که از راس (ا) بر قاعه (ب ج) خارج شود اقصر خواهد بود نسبت بخط (ا ب)
- (۱۵) در مثلث (ا ب ج) زاویه (ب ا ج) از خط مستقیم (ا د) تنصیف میشود ثابت کن (ب ا) اطول است نسبت به (ب د) نسبت به (ج د) از یک نقطه هر قدر خطوط تا بخط مستقیم خارج شوند در آنها خط عمود از هر اقصر خواهد بود و در آن خطوط مستقیم که خارج میشوند خطی که اقرب بعمود است اقصر است نسبت بخطی که ابعداً واقع میشود و نیز غیر همگراست در این خطوط زیاده از دو خط متساوی یافت شود

- که هر یک از این دو در یک جانب عمود خواهد بود .
- (۱۶) نقطه که در مثلث واقع میشود مجموعاً ابعاد ثلاثه آن تا زوایای مثلث زیاده است از نصف مجموع اضلاع آن و کمتر است از مجموع آن .
- (۱۷) مجموع اضلاع شکل ذو اربعه الاضلاع زیاده است از او تار آن .
- (۱۸) مجموع او تار ذو اربعه الاضلاع اقصر است نسبت به مجموع خطوط اربعه که از یک نقطه معلومه تا زوایای آن خارج شوند .
- (۱۹) مجموع دو ضلع مثلث اطول است نسبت به و چیزی خط متوسط که تنصیف کند ضلع سوم را .
- (۲۰) در هر مثلث مجموع اضلاع اطول است از مجموع خطوط متوسط آن .
- (۲۱) در مثلثاتی که خطوط منصف زوایا بر ضلع مقابل میرسند
 اول = منصف زاویه قائمه اقوال از نصف ضلع مقابل
 دوم = منصف زاویه منفرجه اقصر است از نصف ضلع مقابل
 سوم = در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین
- منصف زاویه قائم برابر است با نصف ضلع مقابل .
- (۲۲) اقطار معین متساوی نباشند .
- (۲۳) زاویه رأس مثلث که مابین اضلاع غیر متساوی واقع باشد هرگاه از رأس آن خط متوسط و خط منصف خارج شوند بر خط متوسط مابین ضلع اطول و خط منصف واقع خواهد شد



- مثلاً در مثلث (ا ب ج) خط متوسط از (ا) و خط منصف (ا د) مساوی
 (۲۴) زاویه رأس مثلثی که مابین ضلعین غیر متساوی واقع شود هرگاه از آن زاویه سه خط خارج شوند یعنی خط منصف و خط متوسط و سوم عمود بر قاعده پس اولی در مقدار و مقام مابین هر دو خواهد بود .
- (در متساوی الساقین هر سه منطبق شوند)

خطوط متساوی و متوازی الاضلاع

- (۲۵) هرگاه بر دو خط مستقیم متوازی خط مستقیمی واقع شود .

- وزوایای داخلی بجهت آن تنصیف شوند
 پس خطوط منصف زوایا بر قائمه تقاطع خواهند نمود
 خطی که تنصیف زاویه میکند هرگاه از یک نقطه آن
 خطوط مستقیم متوازی با اضلاع و با اضلاع خارج شوند
 از خروج آن شکل معین یا سریع تشکیل خواهد یافت
 خط (اب) را (دج) در نقطه (د) قطع میکند
 زوایای هر دو جانب تنصیف شده اند
 پس هرگاه در (دج) از یک نقطه مثلاً (س) خط (ص س ط)
 متوازی (اب) خارج شود
 و با خطوط منصف در (ص) و (ط) وصل شود
 ثابت کن (س ص) و (س ط) با هم متساویند
 هرگاه با خطوط مستقیم متوازی خط مستقیم دیگر موصول شود
 نقطه وسط آن با خطوط متوازی بر فاصله متساوی خواهد بود
 اب ج مثلث متساوی الساقین است
 خط (د س) را متوازی (ب ج) چنان خارج کن
 که با اضلاع متساوی بر نقطه (د) و (س) موصول شود
 و (ب د) و (د س) و (س ج) با هم متساوی باشند
 (اب) و (د ج) دو خط مستقیمند و در (اب) نقطه (س) معلوم است
 و لکن نقطه در آن مثلاً (ص) پیدا کن
 که فاصله (ص س) مساوی باشد با عمودیکه از (ص) بر (ج د) خارج شود
 هرگاه از نقطه وسط ضلع مثلث خط متوازی با قاعده خارج شود
 آن خط ضلع دیگر را هم تنصیف خواهد نمود
 خط مستقیمیکه نقاط وسط ضلعین مثلث را وصل دهد
 مساوی نصف ضلع سوم خواهد بود
 در نقاط وسط اضلاع مثلث خطوط ثلاثه که موصول شوند
 مثلث را در چهار مثلث متساوی تقسیم خواهند نمود
 که از هر حیثیت با هم متساوی باشند
 خط مستقیمیکه از رأس مثلث تا قاعده خارج شود
 تنصیف خواهد شد از خطی که نقاط وسط ضلعین را وصل نماید
 در شکل ذوزنقه خطی که نقاط وسط اضلاع غیر متوازی را وصل دهد

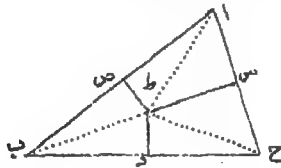


متوازی خواهد بود با اضلاع متوازی آن
و از نقطه وسط او تار خواهد گذشت

(۳۶) در شکل دوزنق خطی که نقاط وسط اضلاع غیر متوازی از او وصل نماید
مساوی نصف مجموع ضلعین متوازی آن خواهد بود
و فرق حصص آن که مابین وترین واقع شوند
مساوی نصف فرق ضلعین متوازی خواهد بود

تعریف خطوط مشترک لقطه مثلاث

(۱) عما تدیک از نقاط وسط اضلاع مثلث خارج شوند مشترک القطره میباشد
یعنی در یک نقطه موصول شوند



فرض کن مثلث (ا ب ج) را نقاط وسط (د) و (س) و (ص) است
پس عما تدیک بر نقاط مذکوره قائم شوند مشترک القطره خواهند بود
وضع شکل = بر (ا ب) و (ا ج) از نقطه (ص) و (س) خارج کن عمود را
چونکه غیر ممکن است عما تدیک مذکوره متوازی باشند لابد در یک نقطه مشترک
(ط) موصول خواهند شد

وصل کن (ط د) را

پس (ط د) بر (ب ج) عمود خواهد بود

وصل کن (ط ا) و (ط ب) و (ط ج) را

ثبوت = چونکه در مثلثین (ط س ا) و (ط س ج) ضلع (س ا) مساوی
(س ج) است

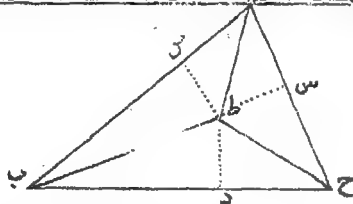
و (س ط) مشترک در هر دو

و زاویه (ط س ا) مساوی با زاویه (ط س ج) زیرا که هر یکی قائمه میباشد
لهذا المثلثان (س ا ط) و (س ج ط) مساویت با ضلع (ط ج)

و بهین تفصیل در مثلثین (ط ص ا) و (ط ص ب) ثابت توان نمود که (ط ا)
برابر است با (ط ب)

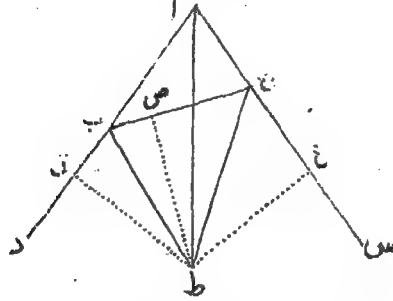
از این میان معلوم شد که (ط ا) و (ط ب) و (ط ج) با هم متساوینند
 پس چونکه (د) نقطه وسط است در ضلع (ب ج)
 و نیز چونکه در مثلث متساوی الساقین خطی که از رأس بنقطه وسط قاعده
 برسد بر آن عمود می باشد
 لهذا عائد ثلاثه یعنی (ط د) و (ط س) و (ط ص) بر نقطه (ط) موصول
 میشوند
 و مقصود همین ثبوت بوده است -

(۲) خط وسط منصفه و یا مثلث متساوی الساقین



فرض کن در مثلث (اب ج) زاویه بین (ا ب ج) و (ب ج ا) از خطوط مستقیم
 که در نقطه (ط) موصولند تصنیف میشوند
 وضع شکل = وصل کن (ط ا) با
 فعل باید ثابت کنیم که (ط) تصنیف میکند زاویه (ب ا ج) را
 بر اضلاع مثلث از نقطه (ط) خارج کن عائد (ط د) و (ط س) و (ط ص)
 ثبوت = چونکه در مثلثین (ط ب د) و (ط ب ص) زاویه (ط ب د)
 مساوی است با زاویه (ط ب ص)
 و زاویه (ط د ب) مساوی با زاویه (ط ص ب) زیرا که هر یکی قائمه می باشد
 و ضلع (ط ب) در هر دو مشترک
 پس (بحکم ۲۶) ضلع (ط د) برابر است با (ط ص)
 همین طور در مثلثین (ط ج د) و (ط ج س) ثابت توان نمود که ضلع
 (ط د) برابر است با (ط س)
 پس (ط د) و (ط س) و (ط ص) با هم متساوینند
 و چونکه در مثلثین (ط ص ا) و (ط س ا) زاویه بین (ط ص ا) و (ط س ا) با هم
 متساوینند
 زیرا که هر یکی قائم می باشد و وتر (ط ا) مشترک در هر دو
 و (ط ص) مساوی (ط س)
 لهذا (بحکم ۲۶) زاویه (ص ا ط) مساوی است با زاویه (س ا ط)
 یعنی زاویه (ب ا ج) را خط (ط ا) تصنیف میکند
 بنابراین در هر مثلث منصفه و یا دایره یک نقطه مثلاً (ط) موصول
 میشوند -

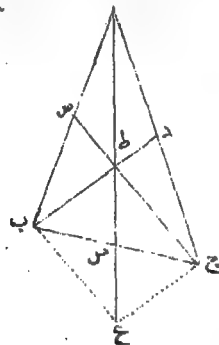
(۳) در مثلث خطوط منصفه دو زاویه خارجی و یک زاویه داخلی
مشترک النقطه میباشند



فرض کن در مثلث (ا ب ج) ضلعین (ا ب) و (ا ج) تا نقطه (د) و
(س) امتداد شده اند
و زاوای خارجی یعنی (د ب ج) و (س ج ب) را خطوط مستقیم منصفه
نموده در نقطه (ط) موصول شده اند
وضع شکل = وصل کن (ا ط) را
حال باید ثابت شود که زاویه (ب ا ج) را خط (ا ط) تنصیف میکند
بر اضلاع مثلث از نقطه (ط) خارج کن عمود (ط ص) و (ط ع) و
(ط ق) را
ثبوت = چونکه در مثلثین (ط ب ص) و (ط ب ق) زاویه (ط ب ص)
مساویت با زاویه (ط ب ق)
و نیز زاویه (ط ص ب) مساویت با زاویه (ط ق ب) زیرا که هر یکی
قائم میباشند
و (ط ب) در هر دو مشترک
لذا بحکم (۲۶) ضلع (ط ص) مساویت با (ط ق)
همین قدر ثابت میشود که در مثلثین (ط ج ص) و (ط ج ع) ضلع (ط ص)
برابر است با (ط ع)
پس (ط ص) و (ط ع) و (ط ق) با هم متساوینند
و چونکه در مثلثین (ط ق ا) و (ط ع ا) زاویه (ا ق ط) مساویت با زاویه
(ا ع ط) زیرا که هر یکی قائم میباشند
و نیز (ط ا) مشترک است و ضلع (ط ق) برابر با ضلع (ط ع)
لذا بحکم (۲۶) زاویه (ق ا ط) مساویت با زاویه (ع ا ط)
یعنی زاویه (ب ا ج) را خط (ا ط) تنصیف مینماید
بنابرین خطوط منصفه دو زاویه خارجی یعنی (ب ط و) (ا ط و) در یک نقطه
موصول شده اند
و تنصیف نموده اند دو زاویه خارجی و یک زاویه داخلی را

یعنی زاویه (د ب ج) و (ر س ج ب) و (ب ا ج) را

(۴) خطوط متوسط در مثلث مشترک
النقطه میباشند



فرض کن (ا ب ج) مثلث و دو متوسط آن (ب د) و (ج س) است که بر نقطه
(ط) متقاطع میباشند
وضع شکل = وصل کن (ا ط) را و خارج کن از ا قه می که در (ب ج)
بر نقطه (ص) برسد
پس متوسط سوم (ا ط) خواهد بود
اینست از نقطه (ج) خارج کن (ج ع) را که متوازی باشد با (د ب)
و متساوی (ا ص) را که در نقطه (ع) با خط (ج ع) موصول شود
وصل کن (ب ع) را
ثبوت = چونکه در مثلث (ا ع ج) ضلع (ا ج) را نقطه وسط
(د) است

و (ج ع) متوازی است با (د ط)
پس (ط) نقطه وسط (ا ع) است = بین در صفحه ۱۳۷
سؤال ۳۱ را
اینست چونکه در مثلث (ا ب ج) ضلعین (ا ب) و (ا ج) را نقاط
وسط (س) و (ط) است
پس (ا ب ج) متوازی (ط ع) خواهد بود = (بین در صفحه ۱۳۷)

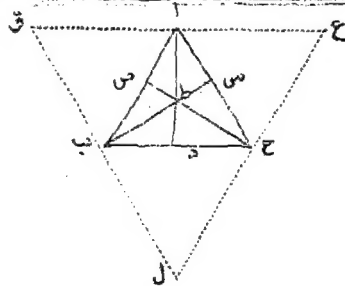
سؤال ۳۱
یعنی (ط ج) متوازی (ب ع) است
بنابرین (ب ع ج ط) متوازی الاضلاع میباشد
و چون اقطار متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف میکنند
لهذا (ص) نقطه وسط ضلع (ب ج) است

یعنی (اص) متوسط مثلث (ابج) است
پس ثابت شد که دو مثلث هر سه متوسط در یک نقطه موصول میشوند

نتیجه صحیح

در مثلث هر سه متوسط یکدیگر را در نقطه مشترک تثلیث مینمایند
و قیمت طول آن طرفی را ویر میباشند
مثلاً در شکل فوقانی ثابت شد که (اط) مساویست با (طع)
و چون که (طص) نصف (طع) است
پس (طص) نصف (ط ا) هم میباشد
یعنی (طص) یک ثلث (اص) است
همین ترتیب ثابت میشود که (ط د) یک ثلث (ب د) و (ط س) یک ثلث (س ج) است
انصافاً از این عمل منتج و مستفاد میشود
که متوسط اقصر ضلع طول را نصف مینماید
بدانکه نقطه تقاطع خطوط متوسط را مرکز ثقل مثلث گویند
چنانکه در دو واژه گویات نقطه وسط را مرکز تفصل نامند
زیرا که در این نقطه مفید که شرح آن کشید است اجزای اجسام
تعداد دارند

(۵) هرگاه از رؤس مثلث (مثلث حاد الزوایا) را خط
مقابل آنکه خارج شوند مشترکاً نقطه خواهند بود



فرض کن از رؤس مثلث (ابج) را ضلاع مقابل عماد (اد) و (ب س)
و (ج ص) خارج شده اند
پس هر سه عماد در یک نقطه مثلاً (ط) موصول خواهند شد

وضع شکل = از نقطه (ا) و (ب) د (ج)
 خارج کن (ع ق) و (ق ل) و (ل ع) را
 قسید که متوازی باشد با اضلاع مقابل
 یعنی (ع ل) متوازی باشد با (ا ب) و (ق ل) با (ا ج) و (ق ع) با (ب ج)
 پس یک ش ۳۲ (ا ب ج ع) متوازی الاضلاع میباشد
 زیرا که (ا ب) متوازی (ع ج) است و
 ایضا شکل (ا ب ل ج) متوازی الاضلاع است
 زیرا که (ا ب) متوازی (ل ج) است
 پس (ل ج) متوازی است با (ج ع)
 یعنی (ج) نقطه وسط (ل ع) است و
 و كذلك (ا) و (ب) نقاط وسطند ضلعین (ع ق) و (ق ل) را
 بنابراین براضلاع مثلث (ل ع ق) از نقاط وسط عمائد (ا د) و (ب م) و
 (ص ج) خارج شده اند پس شکل ا ذ ل خطوط مشترک القطه را
 پس در شکل مذکوره هر سه عمود بر یک نقطه یعنی (ط) موصول خواهند شد
 یعنی در وایا می مثلث (ا ب ج) عمائدیکه براضلاع مقابل خارج شده اند
 در یک نقطه موصول میشوند و
 بدانکه در مثلث ضلع ج الزاویه نقطه را نیز یعنی نقطه مشترک عمائد بود
 از شکل واقع میشود یعنی براضلاع عموده
 و در مثلث قائم الزاویه بر نقطه قائمه واقع شود
 قسید که دو عمود براضلاع منطبق شوند و

تفهیم = هرگاه مبتدی خواسته باشد بیرون از علوم حاصل نماید خاصه از علم هند
 لازم است که همت و شوق خود را معلم خود قرار دهد - اشکال فرموده را
 و متحمل نماید و
 زیرا که در هر کاری قانند شوق است که لشکر مقاصد را بجزای مقصود میرساند

والسلام علی خیر الانام

موجب قانون بیست و پنجم کورنمت سرکاری این کتاب اقلیدس
 فارسی جبر است هر کس بدون اجازه مالک این طبع
 ناصر اقدام در طبع نماید مورد مؤاخذه
 قانونی خواهد بود ۱۳۲۱

CALL No.

211
398

ACC. NO.

15444

AUTHOR

TITLE

فارسی اقلیدس (مقاله اول)

| Date | No. | Date | No. | No. |
|------|-----|------|-----|-----|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

AT THE TIME



MAULANA AZAD LIBRARY ALIGARH MUSLIM UNIVERSITY

RULES:-

1. The book must be returned on the date stamped above.
2. A fine of Re. 1-00 per volume per day shall be charged for text-books and 10 Paise per volume per day for general books kept over-due.

